

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
AVEC LE CONCOURS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
PAR LES SECRÉTAIRES

Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France*

TOME — ANNÉE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

11, rue Pierre-Curie, PARIS (5^e)

FORMULES APPARENTÉES A CELLES DE NEVANLINNA-AHLFORS
POUR CERTAINES APPLICATIONS
D'UNE VARIÉTÉ A n DIMENSIONS DANS UNE AUTRE ;

PAR M^{me} MARIE-HÉLÈNE SCHWARTZ.

SOMMAIRE.

Introduction.

- I. **Applications paraboliques.** — § 1. Définitions, énoncé du théorème I. — § 2. Un lemme. — § 3. Nombre $N(t)$; théorème I, *a*. — § 4. Points dont la déficience transcendante tend vers zéro, théorème I, *b*.
- II. **Applications régulières et paraboliques.** — § 5. Rappel de définitions et de résultats. — § 6. Théorème II.
- III. **Applications régulières pseudo-simpliciales et paraboliques.** — § 7. Applications régulières pseudo-simpliciales. — § 8. Définitions des déficiences des points et des simplexes. — § 9. Applications à déficiences normales. — § 10. Conditions (N); énoncé du théorème III. — § 11. Démonstration du théorème III *a* et *b*. — § 12. Démonstration du théorème III, *c*. — § 13. Démonstration du théorème III, *d*.
- IV. **Cas particuliers.** — § 14. Applications définies par des fonctions méromorphes dans le plan. Théorème IV. — § 15. Remarques diverses.

Index bibliographique.

Index des notations.

Introduction.

Dans son Mémoire paru en 1935 aux *Acta Mathematica* ⁽¹⁾, Ahlfors a repris la théorie de Nevanlinna ⁽²⁾ en la rattachant à des propriétés métriques et topologiques de certaines applications d'une variété à deux dimensions dans une autre, parmi lesquelles figurent celles du plan complexe C dans la sphère de Riemann S^2

⁽¹⁾ Ahlfors [1].

⁽²⁾ Nevanlinna [1]; ce livre expose aussi les résultats d'Ahlfors dans [1] et nous nous y référerons souvent.

définies par des fonctions méromorphes dans le plan complexe ⁽³⁾. Ce sont ces propriétés métriques et topologiques que nous généralisons à certaines applications d'une variété différentiable, V , orientée à n dimensions réelles dans une autre W de même dimension et compacte. Nous n'abordons pas, sauf par des remarques simples, le cas des applications analytiques complexes; il n'est donc pas question ici d'une généralisation de la théorie de Nevanlinna aux systèmes de fonctions d'une ou plusieurs variables complexes telles que celles de H. et J. Weyl ⁽⁴⁾ ou de Stoll ⁽⁵⁾.

Nos principaux résultats sont résumés dans les énoncés de quatre théorèmes (§ 1, 6, 10 et 14).

I. Nous considérons d'abord, (définition 1.1) une « application parabolique » f de V dans W ; c'est une application différentiable, discrète, conservant l'orientation; de plus V possède une famille de variétés d'approche V_t qui généralisent les disques $|z| < r$ du cas classique des applications méromorphes de $V = C$ dans $W = S^2$ et les chaînes $f(V_t)$ vérifient une condition asymptotique (1.1) qui généralise la condition classique d'Ahlfors $L/S \rightarrow 0$ ⁽⁶⁾.

Le théorème I démontre alors que, lorsque t tend vers sa limite, « presque tous » les points de W sont recouverts un nombre de fois « presque égal » à une fonction $N(t)$; dans le cas des applications méromorphes de C dans S^2 si l'on fait $t = r$, $N(r)$ est équivalent, à un facteur près, à l'aire $S(r)$ et à $d(T(r))/d \log r$. Dans ce cas Ahlfors revient, par intégration, à la caractéristique $T(r)$ de Nevanlinna; ici nous ne le ferons dans aucun cas, les fonctions que nous utiliserons s'exprimeront toutes sans intégration, à partir des nombres de recouvrement; $N(t, \alpha)$ sera le nombre de recouvrement d'un point α de W compte tenu des degrés topologiques, $\bar{N}(t, \alpha)$ le nombre des points de $f^{-1}(\alpha) \cap V_t$ et les déficiences transcendentes et algébriques de α seront les fonctions

$$\delta(t, \alpha) = 1 - N(t, \alpha)/N(t) \quad \text{et} \quad \vartheta(t, \alpha) = (N(t, \alpha) - \bar{N}(t, \alpha))/N(t) \quad (7).$$

II. Nous supposons ensuite que f est, de plus une « application régulière » (définition 5.3), une telle application est, en particulier un homéomorphisme en tous les points de V sauf en ceux d'un sous-complexe d'une « triangulation régulière » (D') de V (définition 5.1). Dans notre Mémoire [A] ⁽⁸⁾ nous avons établi, pour les applications régulières une formule apparentée à celle de Gauss-Bonnet généralisée suivant la méthode de Chern ⁽⁹⁾ [formule (5.5)]. Appliquée

⁽³⁾ Voir aussi Stoilow [1].

⁽⁴⁾ H. et J. Weyl [1].

⁽⁵⁾ W. Stoll [1] et [2].

⁽⁶⁾ Nevanlinna [1], p. 331.

⁽⁷⁾ Nevanlinna et Ahlfors désignent les symboles correspondants pour le cas des applications méromorphes par $n(r, \alpha)$ et $\bar{n}(r, \alpha)$.

⁽⁸⁾ Nous nous référerons souvent à ce Mémoire (M. H. Schwartz [2]) (*Acta Mathematica*, t. 91 1954), il est formé par les deux premiers chapitres de ma thèse de doctorat soutenue à la Faculté des Sciences de Paris en 1953; le présent Mémoire est formé par le troisième chapitre.

⁽⁹⁾ Chern [1].

à une variété d'approche V_t elle pourra s'écrire

$$(1) \quad \int_{f(V_t)} \Omega_0 = \int_{\mathfrak{K}(\hat{V}_t)} -\Pi + \chi_f(V_t),$$

Ω_0 est la courbure totale pour une métrique riemannienne quelconque de W et $-\Pi$ la forme de Chern associée à Ω et définie dans l'espace des vecteurs tangents à W . χ_f est une caractéristique qui généralise celle d'Euler-Poincaré et qui peut se définir par une triangulation de V en simplexes ouverts $D_i^{n,k}$ le long desquels le degré topologique local de f , $m(D_i^{n,k})$ est constant; on a

$$\chi_f(V) = \sum_{i,k} (-1)^k m(D_i^{n,k}).$$

Le théorème I montre que le premier terme de (1) est équivalent à $N(t)\chi(W)$. Revenons alors au cas des applications méromorphes de C dans S^2 , ce terme est donc équivalent à $2S(r)$, le premier terme du second membre est l'intégrale de courbure géodésique dont Ahlfors a montré la relation avec les défauts transcendants de Nevanlinna ⁽¹⁰⁾ et le dernier terme, $\chi_f(V_t)$ est tel que

$$\chi_f(V_t) - \chi(V_t) = \sum (m(z) - 1) \quad \text{pour } |z| \leq r.$$

III. Nous préciserons et généraliserons ces relations dans le cas particulier où nos applications régulières et paraboliques sont pseudo-simpliciales (définition 7.1, § 7), c'est-à-dire conservent une structure triangulée. Dans ce cas nous pourrons définir des déficiences $\delta(t, \Delta_i^k)$ et $\mathfrak{Z}(t, \Delta_i^k)$ relatives à un simplexe Δ_i^k d'une triangulation fini (Δ) de W puis des déficiences transcendante et algébrique, globales :

$$\text{Trs}(t) = \sum_{i,k \leq n-2} (-1)^k \delta(t, \Delta_i^k) \quad \text{et} \quad \text{Alg}(t) = \sum_{i,k \leq n-2} (-1)^k \mathfrak{Z}(t, \Delta_i^k).$$

La fonction $\text{Trs}(t)$ est-elle égale, à $o(1)$ près, au quotient par $N(t)$ de l'intégrale de $-\Pi$ qui figure au deuxième membre de la relation (1) et a-t-on l'égalité $\text{Alg}(t) = [\chi_f(V_t) - \chi(V_t)]/N(t) + o(1)$?

La réponse est positive si la dimension n de V et W est paire, moyennant une certaine limitation du degré topologique local m et certaines conditions (non nécessaires) de régularité (§ 10), l'arbre topologique de l'application est alors de caractère parabolique. Ces diverses propriétés sont résumées dans l'énoncé du théorème III (§ 10) et des propriétés (DN) (§ 9).

IV. Dans l'énoncé du théorème IV nous avons rassemblé nos résultats relatifs à une fonction méromorphe dans le plan; en particulier il suffit que la fonction multiforme inverse n'ait qu'un nombre fini de points critiques a_i pour que l'inégalité de Nevanlinna devienne l'égalité suivante :

$$\sum_i \delta(t, a_i) + \sum_i \mathfrak{Z}(t, a_i) = 2 + o(1),$$

⁽¹⁰⁾ Ahlfors [1].

Pour $n = 2$ toute application méromorphe de V dans W si elle est non constante est régulière et toute application de C dans S^2 est de plus parabolique. Mais, pour $n > 2$ le problème est plus compliqué même lorsque la variété objet est trouée le long de certaines sous-variétés de manière à ce que l'application soit partout définie et discrète; en effet on n'a pas, à notre connaissance, démontré les conditions de triangulabilité et de différentiabilité nécessaires en ce qui concerne les sous-variétés où l'ordre des zéros du jacobien et le degré topologique de l'application sont constants; d'autre part les applications de $C^{n/2}$ dans $C^{n/2}$ ou dans $(S^2)^{n/2}$ n'étant pas conformes ne sont plus nécessairement paraboliques comme le montrent d'ailleurs des exemples classiques; les classes d'applications paraboliques méromorphes (il en existe) généralisent tout autrement les applications de C dans S^2 ⁽¹¹⁾.

I. — Applications paraboliques.

§ 1. Définitions, énoncé du théorème I. — Considérons toujours deux variétés différentiables de classe C_2 , V et W , à n dimensions, orientées et sans bords; W étant compacte, V non compacte.

DÉFINITION 1.1. — *Application parabolique relativement à des variétés d'approche.* — Nous dirons qu'une application f de V dans W est parabolique relativement à la variété d'approche V_t ;

1° si f est différentiable de classe C_2 ;

2° si l'image réciproque, par f , de tout point de W est un ensemble discret de points de V (application « discrète »);

3° si f conserve l'orientation (c'est alors une application « intérieure »);

4° si, t étant un paramètre qui a une limite t_0 suivant une suite ou un filtre (nous noterons $t \rightarrow t_0$), V est la limite d'une famille de sous-variétés compactes V_t que nous appellerons *variétés d'approche*, et qui satisfont aux deux hypothèses suivantes :

(AP)₁ $\dot{V}_t$ étant le bord de V_t , l'ensemble des points de $f(\dot{V}_t)$ admet une structure de complexe différentiable.

(AP)₂ Si l'on munit W d'un ds^2 riemanien et V de la métrique dont le ds^2 est l'image réciproque du précédent par f (métrique non partout riemanienne), on a, en désignant par $\mathfrak{V}^*$ et $\mathfrak{V}$ les hypervolumes et les hypersurfaces relatifs à cette métrique de V :

$$(1.1) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \mathfrak{V}^*(\dot{V}_t) / \mathfrak{V}^*(V_t) = 0.$$

(11) Pour les notations nous avons établi un index à la fin du Mémoire.

Grâce à l'hypothèse $(AP)_1$ cette relation a bien un sens. Elle généralise une condition classique d'Ahlfors ⁽¹²⁾.

REMARQUE 1.1. — Si la relation (1.1) est vérifiée pour une des métriques riemanniennes sur W elle l'est pour toutes.

DÉFINITIONS 1.2. — Soit $\alpha \in W$, conformément aux notations courantes nous distinguerons les cas suivants :

a. il existe un voisinage compact ω de α tel que la restriction de f à chaque composante connexe de $f^{-1}(\omega)$ soit un homéomorphisme sur ω . α est alors appelé *point régulier*;

b. il n'existe pas de tel voisinage mais il existe un voisinage compact ω de α tel que chaque composante connexe de $f^{-1}(\omega)$ soit compacte; alors $f^{-1}(\omega)$ contient au moins un point x de degré topologique $m(x) \geq 2$: $f(x)$ est appelé *point critique algébrique*; α est nécessairement soit un point critique algébrique, soit une *limite de points critiques algébriques*;

c. les deux cas précédents ne sont pas réalisés; donc, quelque soit le voisinage compact ω de α , $f^{-1}(\omega)$ contient au moins une composante connexe non compacte qui, du fait qu'elle est fermée ne peut être contenue dans aucun compact V_t . α est alors appelé *point critique transcendant* ⁽¹³⁾. Si, de plus, $f^{-1}(\omega)$ contient un chemin infini le long duquel $f(x)$ tend vers α , α est appelée *valeur asymptotique* et le chemin, *chemin de détermination* α .

REMARQUE 1.2. — Ces définitions sont valables pour toutes les applications différentiables intérieures et discrètes de V dans W .

NOTATIONS 1.1. — $g(t)$ et $g'(t)$ étant deux fonctions positives nous écrirons : $g'(t) = O(g(t))$ si $g'(t)/g(t)$ est borné supérieurement pour $t \rightarrow t_0$.

$g'(t)$ et $g(t)$ étant deux fonctions réelles nous écrirons : $g'(t) = o(g(t))$ si $g'(t)/g(t)$ tend vers zéro pour $t \rightarrow t_0$, $o(1)$ sera alors une quantité réelle quelconque qui tend vers zéro pour $t \rightarrow t_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = 0 \quad \text{sera noté} \quad g(t) = o(1).$$

DÉFINITIONS 1.3 : $\mathbf{V}(t)$ et $\dot{\mathbf{V}}(t)$. — Désignons par $\mathbf{V}$ et $\dot{\mathbf{V}}$ les hypervolumes et hypersurfaces relatifs à la métrique de W . Considérons, dans W , les chaînes $f(V_t)$ et $f(\dot{V}_t)$ et posons

$$(1.2) \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(f(V_t)) = \mathbf{v}^*(V_t) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(f(\dot{V}_t)) = \dot{\mathbf{v}}^*(\dot{V}_t).$$

La relation (1.1) s'écrit donc :

$$(1.3) \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = o(\mathbf{v}(t)).$$

⁽¹²⁾ Condition L/S $\rightarrow o$ (cf. Nevanlinna [1], p. 331).

⁽¹³⁾ Il ne suffit évidemment pas qu'un point soit critique transcendant pour qu'il ait un défaut transcendant de Nevanlinna non nul; ce n'est pas non plus nécessaire (cf. Teichmüller [1], M. H. Schwartz [1]).

DÉFINITIONS 1.4 : $N(t, \xi)$ et $\bar{N}(t, \xi)$. — Soit $\xi \in W$, nous poserons

$$(1.4) \quad N(t, \xi) = \sum_i m(x_i) \quad \text{pour } x_i \in f^{-1}(\xi) \cap V_t$$

et $\bar{N}(t, \xi)$ sera le nombre des points x_i de $f^{-1}(\xi) \cap V_t$.

THÉOREME I. — a. A l'application f parabolique pour les variétés d'approche V_t on peut associer :

Une fonction positive $N(t)$ qui tend vers l'infini ⁽¹⁴⁾ pour $t \rightarrow t_0$.

Un ensemble variable e_t de W tel que :

$$(1.5) \quad \text{pour } t \rightarrow t_0 : \lim \mathbf{v}(e_t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\xi \in e_t} N(t, \xi) d\mathbf{v} = o(N(t)).$$

Une fonction positive ou nulle $\eta(t)$, qui tend vers zéro pour $t \rightarrow t_0$ de manière que, pour chaque valeur de t :

$$(1.6) \quad \xi \notin e_t \quad \text{entraîne} \quad |1 - N(t, \xi)/N(t)| \leq \eta(t).$$

b. Si, de plus, t est un paramètre positif dont le domaine de variation Θ est une suite d'intervalles tendant vers une limite supérieure $t_0 \leq +\infty$; et si $\bar{\mathbf{v}}(t)/\mathbf{v}(t)$ est majoré par une fonction $\varepsilon(t)$ non croissante qui tend vers zéro assez vite pour que

$$(1.7) \quad \int_{\Theta} \varepsilon^\alpha(t) d(\log \mathbf{v}(t)) < +\infty, \quad \text{avec } \alpha = \frac{n}{n-1},$$

alors il existe dans W un ensemble fixe e de mesure nulle tel que

$$(1.8) \quad \xi \notin e \quad \text{entraîne} \quad \lim (1 - N(t, \xi)/N(t)) = 0 \quad \text{pour } t \rightarrow t_0.$$

§ 2. Un lemme. — LEMME 2.1. — Soit Γ une sous-variété de W de dimension n fermée et qui admet une structure de sous complexe différentiable dans W . On a

$$(2.1) \quad \min[\mathbf{v}(\Gamma), (\mathbf{v}(W) - \mathbf{v}(\Gamma))] \leq K[\bar{\mathbf{v}}(\dot{\Gamma})]^\alpha,$$

K étant une constante relative à la métrique de W .

Appelons, en effet C une des deux variétés Γ et $W - \Gamma$ telle que $\mathbf{v}(C) \leq \frac{1}{2} \mathbf{v}(W)$. Alors $\dot{C} = \dot{\Gamma}$ et la relation (2.1) s'écrit :

$$(2.2) \quad \mathbf{v}(C) \leq K[\bar{\mathbf{v}}(\dot{C})]^\alpha.$$

Considérons alors, dans l'espace R^n , un simplexe différentiable à n dimensions fermé $\bar{\Delta}$. Désignons par $\mathbf{v}_0$ et $\bar{\mathbf{v}}_0$ les hypervolumes et hypersurfaces pour la métrique de R^n . Soit c une sous-variété à n dimensions de $\bar{\Delta}$ admettant une trian-

⁽¹⁴⁾ Le cas simple où $\lim N(t)$ est finie est traité au paragraphe 15.

gulation différentiable donc pour laquelle $\mathbf{V}(c)$ et $\dot{\mathbf{V}}(\dot{c})$ sont définis, posons :

$$(2.3) \quad \dot{c}' = \dot{c} \cap \bar{\Delta}, \quad \text{donc} \quad \dot{c} = \dot{c}' + (\dot{\Delta} \cap c),$$

θ étant un nombre donné $0 < \theta < 1$ et K_1 étant une constante suffisamment petite, il existe une constante K_0 dépendant de $\bar{\Delta}$, de θ et de K_1 telle que :

1° les conditions $\dot{\mathbf{V}}(\dot{c}') \leq K_1$ et $\mathbf{V}_0(c) \geq \theta \mathbf{V}_0(\bar{\Delta})$ entraînant

$$\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{\Delta} - (\dot{\Delta} \cap c)) \leq K_0 \mathbf{V}_0(\dot{c}') \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_0(\Delta - c) \leq K_0 [\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}')]^\alpha;$$

2° les conditions $\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}') \leq K_1$ et $\mathbf{V}_0(c) \leq \theta \mathbf{V}(\bar{\Delta})$ entraînent

$$\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{\Delta} \cap c) \leq K_0 \dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}') \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_0(c) \leq K_0 [\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}')]^\alpha;$$

3° la condition $\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}') \geq K_1$ entraîne

$$\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{\Delta} \cap c) \leq K_0 \dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}') \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_0(c) \leq K_0 [\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}')]^\alpha.$$

Ces trois cas montrent que l'un au moins des deux groupes suivants de conditions est réalisé :

$$(2.4) \quad \mathbf{V}_0(c) \leq K_0 [\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}')]^\alpha \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{V}}_0(\dot{\Delta} \cap c) \leq K_0 \dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}');$$

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_0(\Delta - c) \leq K_0 [\dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}')]^\alpha; \\ \dot{\mathbf{V}}_0(\dot{\Delta} - (\dot{\Delta} \cap c)) \leq K_0 \dot{\mathbf{V}}_0(\dot{c}') \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_0(c) \geq \theta \mathbf{V}_0(\bar{\Delta}). \end{array} \right.$$

Revenons à la variété W ; elle admet une triangulation différentiable en un nombre fini de simplexes fermés $\bar{\Delta}_i$ appartenant chacun au domaine de définition d'une carte. Pour chacun d'eux il existe un homéomorphisme bidifférentiable dans un simplexe fermé de R^n ; l'hypervolume $\mathbf{V}$ (resp. hypersurface $\dot{\mathbf{V}}$) d'une sous-variété de $\bar{\Delta} \subset W$ et l'hypervolume $\mathbf{V}_0$ (resp. hypersurface $\dot{\mathbf{V}}_0$) de son image dans R^n par cet homéomorphisme ψ_i sont dans un rapport borné supérieurement et inférieurement. Les relations (2.4) et (2.5) subsistent si l'on change les constantes; il nous sera en particulier possible de choisir θ_i tel que

$$\mathbf{V}_0(\psi_i(c_i)) \geq \theta_i \mathbf{V}_0(\psi(\bar{\Delta}_i)) \quad \text{entraîne} \quad \mathbf{V}(c_i) \geq \frac{2}{3} \mathbf{V}(\bar{\Delta}_i).$$

Les $\bar{\Delta}_i$ étant en nombre fini nous pouvons prendre des constantes valables pour tous; on en conclut que si c_i est une sous-variété de Δ_i ayant une structure de sous-complexe différentiable il vérifie l'un, au moins, des deux groupes suivants de conditions où K' est une constante convenable :

$$(2.6) \quad \mathbf{V}(c_i) \leq K' [\dot{\mathbf{V}}(\dot{c}_i')]^\alpha \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{V}}(\dot{\Delta} \cap c_i) \leq K' \dot{\mathbf{V}}(\dot{c}_i');$$

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}(\bar{\Delta} - c_i) \leq K' [\dot{\mathbf{V}}(\dot{c}_i')]^\alpha; \\ \dot{\mathbf{V}}(\dot{\Delta} - (\dot{\Delta} \cap c_i)) \leq K' \dot{\mathbf{V}}(\dot{c}_i') \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(c_i) \geq \frac{2}{3} \mathbf{V}(\bar{\Delta}_i). \end{array} \right.$$

Nous pouvons poser $c_i = \overline{C \cap \bar{\Delta}_i}$; on a

$$(2.8) \quad \mathbf{V}(C) = \sum_i \mathbf{V}(c_i) \quad \text{et} \quad [\dot{\mathbf{V}}(\dot{C})]^\alpha \geq \left(\sum_i \mathbf{V}(\dot{c}_i') \right)^\alpha \geq \sum_i [\dot{\mathbf{V}}(\dot{c}_i')]^\alpha.$$

Les conditions (2.7) ne peuvent pas être réalisées simultanément pour tous les c_i car la troisième donnerait, par sommation $\mathfrak{V}(C) \geq \frac{2}{3} \mathfrak{V}(W)$ contrairement à la définition même de C .

Supposons que les conditions (2.6) soient réalisées simultanément pour tous les c_i ; les relations (2.8) montrent que

$$\mathfrak{V}(C) = \sum_i \mathfrak{V}(c_i) \leq K' \sum_i [\dot{\mathfrak{V}}(c'_i)]^2 \leq K' [\dot{\mathfrak{V}}(\dot{C})]^2,$$

c'est-à-dire que la relation (2.2) est vérifiée pour $K = K'$.

Il reste à examiner le cas où (2.6) est vérifié pour certains c_i et (2.7) pour d'autres. Il existera alors au moins un couple de simplexes Δ_λ et Δ_μ ayant en commun un simplexe s à $n-1$ dimensions tel que c_λ vérifie (2.6) et c_μ , (2.7). C détermine un recouvrement de s en une région $s \cap c_\lambda \subset C$, une région $s - (s \cap c_\mu) \subset (W - \dot{C})$ et une région $s \cap \dot{C}$. Appelons $\dot{v}$ l'hypersurface minima d'un simplexe à $n-1$ dimensions de (Δ) et majorons les hypervolumes des trois régions à l'aide des relations (2.6) pour c_λ et (2.7) pour c_μ . Il vient

$$\dot{v} \leq \dot{\mathfrak{V}}(s) \leq K' \dot{\mathfrak{V}}(c'_\lambda) + K' \dot{\mathfrak{V}}(c'_\mu) + \dot{\mathfrak{V}}(\dot{C}) \leq 3 \dot{\mathfrak{V}}(\dot{C}) \max[K', 1]$$

ou

$$\dot{\mathfrak{V}}(\dot{C}) \geq \dot{v}/3 \max(K', 1) = K'',$$

par ailleurs

$$\mathfrak{V}(C) \leq \mathfrak{V}(W)/2,$$

donc

$$\mathfrak{V}(C) \leq [\mathfrak{V}(W)/2 (K'')^\alpha] [\dot{\mathfrak{V}}(\dot{C})]^2.$$

Ce qui est la relation (2.2) pour K convenable. Nous prendrons finalement $K = \max[K', \mathfrak{V}(W)/2 (K'')^\alpha]$: (2.2) sera alors toujours vérifié ainsi que (2.1),

C. Q. F. D.

§ 3. Nombre $N(t)$. Démonstration du théorème I, α . — INFINIMENT PETITS UTILISÉS. — Définissons $\varepsilon(t)$ tel que

$$(3.1) \quad \varepsilon(t) = o(1) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \leq \dot{\mathfrak{V}}(t)/\mathfrak{V}(t),$$

l'existence de $\varepsilon(t)$ est assurée par la relation (1.3); on peut alors définir $\eta_1(t)$ tel que

$$(3.2) \quad \eta_1(t) = o(1) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) = o[\eta_1(t)],$$

puis $\eta_2(t)$ tel que

$$(3.3) \quad \eta_2(t) = o(1) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t)/\eta_1(t) \leq \eta_2(t),$$

puis enfin

$$(3.4) \quad \eta_3(t) = \varepsilon(t) \eta_1^{\alpha-1}(t)/\eta_2(t) = \eta_1^\alpha(t) \varepsilon(t)/(\eta_1(t), \eta_2(t)),$$

ce qui, compte tenu de (3.3) donne

$$(3.5) \quad \eta_3(t) \leq \eta_1^\alpha(t) = o(1) \quad (15).$$

(15) Ces relations sont, par exemple, vérifiées pour

$$\eta_1(t) = \varepsilon^{1/\alpha}(t); \quad \eta_2 = \varepsilon^{1-1/\alpha}(t); \quad \eta_3 = \varepsilon.$$

LES COMPLEXES $\Gamma_{t,\mu}$. — $\Gamma_{t,\mu}$ est l'ensemble des points ξ de W tels que

$$(3.6) \quad \xi \in \Gamma_{t,\mu} \quad \text{entraîne} \quad N(t, \xi) \geq \mu.$$

De l'hypothèse $(AP)_1$ résulte que $\Gamma_{t,\mu}$ est un complexe différentiable. Par ailleurs

$$(3.7) \quad \mu_2 > \mu_1 \quad \text{entraîne} \quad \Gamma_{t,\mu_2} \subset \Gamma_{t,\mu_1} \quad (\text{l'inclusion peut comporter ici l'égalité}).$$

D'autre part, en désignant toujours par le même symbole une sous-variété orientée de W et le cycle qu'elle définit par immersion canonique dans W , $\Gamma_{t,\mu}$ orienté canoniquement pourra désigner le complexe ou une chaîne à n dimensions ayant pour bord un cycle $\dot{\Gamma}_{t,\mu}$. On aura

$$(3.8) \quad f(V_t) = \sum_{\mu \geq 1} \Gamma_{t,\mu} \quad \text{et} \quad f(\dot{V}_t) = \sum_{\mu \geq 1} \dot{\Gamma}_{t,\mu}$$

et, compte tenu des formules (1.2) :

$$(3.9) \quad \mathbf{v}(t) = \sum_{\mu \geq 1} \mathbf{v}(\Gamma_{t,\mu}) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = \sum_{\mu \geq 1} \dot{\mathbf{v}}(\dot{\Gamma}_{t,\mu}).$$

CLASSIFICATION DES $\Gamma_{t,\lambda}$. — *Catégorie des $\Gamma_{t,\lambda}$.* — Appelons $\Gamma_{t,\lambda}$ tout complexe $\Gamma_{t,\mu}$ qui vérifie

$$(3.10) \quad \dot{\mathbf{v}}(\Gamma_{t,\lambda}) \geq \eta_1(t),$$

soit $\nu_\lambda(t)$ le nombre des $\Gamma_{t,\lambda}$, on a

$$\nu_\lambda(t) \eta_1(t) \leq \sum_{\lambda} \dot{\mathbf{v}}(\Gamma_{t,\lambda}) \leq \sum_{\mu} \dot{\mathbf{v}}(\Gamma_{t,\mu}) = \dot{\mathbf{v}}(t) \leq \varepsilon(t) \mathbf{v}(t)$$

ou

$$(3.11) \quad \nu_\lambda(t) \leq (\varepsilon(t)/\eta_1(t)) \mathbf{v}(t) \leq \eta_2(t) \mathbf{v}(t).$$

Catégorie des $\Gamma_{t,i}$. — Appelons $\Gamma_{t,i}$ tout complexe $\Gamma_{t,\mu}$ qui vérifie

$$(3.12) \quad \dot{\mathbf{v}}(\Gamma_{t,i}) < \eta_1(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(\Gamma_{t,i}) \geq \frac{1}{2} \mathbf{v}(W),$$

soit $\nu_i(t)$ le nombre des $\Gamma_{t,i}$, on a

$$\nu_i(t) \frac{1}{2} \mathbf{v}(W) \leq \sum_i \mathbf{v}(\Gamma_{t,i}) \leq \sum_{\mu} \mathbf{v}(\Gamma_{t,\mu}) = \mathbf{v}(t)$$

ou

$$(3.13) \quad \nu_i(t) \leq 2 \mathbf{v}(t) / \mathbf{v}(W).$$

Comme $\mathbf{v}(W - \Gamma_{t,i}) \leq \frac{1}{2} \mathbf{v}(W)$, le lemme 2.1 donne

$$\sum_i \mathbf{v}(W - \Gamma_{t,i}) \leq K \sum_i [\dot{\mathbf{v}}(\dot{\Gamma}_{t,i})] \leq K \sum_i \dot{\mathbf{v}}(\dot{\Gamma}_{t,i}) [\dot{\mathbf{v}}(\dot{\Gamma}_{t,i})]^{z-1}$$

ou, compte tenu de (3.12)

$$\sum_i \mathbf{v}(W - \Gamma_{t,i}) \leq K \tau_1^{z-1}(t) \sum_i \dot{\mathbf{v}}(\dot{\Gamma}_{t,i}) \leq K \tau_1^{z-1}(t) \sum_{\mu} \dot{\mathbf{v}}(\Gamma_{t,\mu}) = K \tau_1^{z-1}(t) \mathbf{v}(t)$$

ou encore

$$(3.14) \quad \sum \mathfrak{V}(W - \Gamma_{t,i}) \leq K\varepsilon(t) \eta_1^{\alpha-1}(t) \mathfrak{V}(t).$$

Catégorie des $\Gamma_{t,j}$. — Appelons $\Gamma_{t,j}$ tout complexe $\Gamma_{t,\mu}$ qui vérifie

$$(3.15) \quad \mathfrak{V}(\Gamma_{t,j}) < \eta_1(t) \mathfrak{V}(t) \quad \text{et} \quad \mathfrak{V}(\Gamma_{t,j}) < \frac{1}{2} \mathfrak{V}(W).$$

Leur nombre ne peut pas être limité mais le lemme 2.1 appliqué aux $\Gamma_{t,j}$ comme précédemment aux $W - \Gamma_{t,i}$ montre que

$$(3.16) \quad \sum_j \mathfrak{V}(\Gamma_{t,j}) \leq K\varepsilon(t) \eta_1^{\alpha-1}(t) \mathfrak{V}(t).$$

DÉFINITION 3.1 : e'_t , e''_t et e_t . — L'adhérence $\overline{W - \Gamma_{t,i}}$ de $W - \Gamma_{t,i}$ est un complexe. Appelons e'_t (resp. e''_t) l'ensemble des points de W situés dans l'intersection de complexes $\overline{W - \Gamma_{t,i}}$ (resp. $\Gamma_{t,j}$) en nombre $\geq \eta_2(t) \mathfrak{V}(t)$.

e'_t et e''_t sont donc des complexes (non nécessairement disjoints) ainsi que leur réunion $e_t = e'_t \cup e''_t$.

De la définition de e'_t et de la relation (3.13) il résulte que

$$\mathfrak{V}(e'_t) \eta_2(t) \mathfrak{V}(t) \leq \sum_i \mathfrak{V}(W - \Gamma_{t,i}) \leq K\varepsilon(t) \eta_1^{\alpha-1}(t) \mathfrak{V}(t),$$

ou

$$\mathfrak{V}(e'_t) \leq K\varepsilon(t) \eta_1^{\alpha-1}(t) / \eta_2(t) = K\eta_3(t).$$

Le même raisonnement permet de limiter $\mathfrak{V}(e''_t)$ en partant de (3.16); on a donc

$$(3.17) \quad \mathfrak{V}(e'_t) \leq K\eta_3(t); \quad \mathfrak{V}(e''_t) \leq K\eta_3(t) \quad \text{et} \quad \mathfrak{V}(e_t) \leq 2K\eta_3(t) \leq 2K\eta_1^{\alpha}(t)$$

PROPRIÉTÉ 3.1 :

$$(3.18) \quad \xi' \notin e'_t \quad \text{et} \quad \xi'' \notin e''_t \quad \text{entraînent} \quad |N(t, \xi') - N(t, \xi'')| \leq 3\eta_2(t) \mathfrak{V}(t).$$

Soient, en effet, α' et α'' deux points de W tels que

$$(3.19) \quad N(t, \alpha'') - N(t, \alpha') > 3\eta_2(t) \mathfrak{V}(t).$$

Posons $\nu = N(t, \alpha'') - N(t, \alpha')$; il y a ν complexes $\Gamma_{t,\mu}$ emboîtés qui contiennent α'' et dont le complémentaire dans W contient α' ; ce sont ceux pour lesquels $N(t, \alpha') + 1 < \mu_i \leq N(t, \alpha'')$; de la relation (3.11) il résulte que, parmi ces ν complexes $\Gamma_{t,\mu}$, $\eta_2(t) \mathfrak{V}(t)$ au plus sont des $\Gamma_{t,\lambda}$. Comme $\nu > 3\eta_2(t) \mathfrak{V}(t)$, il y a, parmi les $\Gamma_{t,\mu}$ considérés, plus de $\eta_2(t) \mathfrak{V}(t)$ complexes appartenant à une même catégorie qui est, soit celle des $\Gamma_{t,i}$ soit celle des $\Gamma_{t,j}$.

Supposons que ce soit celle des $\Gamma_{t,j}$; α'' qui est dans chacun d'eux, donc dans plus de $\eta_2(t) \mathfrak{V}(t)$ complexes $\Gamma_{t,j}$ est dans e''_t d'après la définition même de e''_t .

Supposons maintenant que ce soit la catégorie des $\Gamma_{t,i}$ qui contienne plus de $\eta_2(t) \mathfrak{V}(t)$ complexes parmi les $\Gamma_{t,\mu}$ considérés. Comme α' est dans le complémentaire de chacun d'eux par rapport à W , α' est dans plus de $\eta_2(t) \mathfrak{V}(t)$ complexes $\overline{W - \Gamma_{t,i}}$, donc dans e'_t d'après la définition même de e'_t .

On a donc, soit $\mathfrak{a}' \in e'_t \subset e_t$, soit $\mathfrak{a}'' \in e''_t \subset e_t$, ce qui démontre, par l'absurde, la propriété 3.1

PROPRIÉTÉ 3.2 :

$$(3.20) \quad \xi_0 \notin e_t \quad \text{entraîne} \quad |\mathbf{N}(t, \xi_0) - \mathbf{v}(t)/\mathbf{v}(\mathbf{W})| = \eta(t)\mathbf{v}(t)/\mathbf{v}(\mathbf{W}),$$

avec

$$\eta(t) = O(\eta_1^\alpha(t) + \eta_2(t)).$$

On a, en effet :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^*(V_t) = \int_{V_t} d\mathbf{v}^* = \int_{\mathbf{W}} \mathbf{N}(t, \xi) d\mathbf{v} = \int_{e'_t} \mathbf{N}(t, \xi) d\mathbf{v} + \int_{\mathbf{W} - e_t} \mathbf{N}(t, \xi) d\mathbf{v}.$$

ξ_0 étant un point quelconque de $\mathbf{W} - e_t$, nous écrirons

$$(3.21) \quad \mathbf{v}(t) = \int_{e_t} \mathbf{N}(t, \xi) d\mathbf{v} + \mathbf{N}(t, \xi_0)\mathbf{v}(\mathbf{W} - e_t) + \int_{\mathbf{W} - e_t} (\mathbf{N}(t, \xi) - \mathbf{N}(t, \xi_0)) d\mathbf{v}.$$

On a, d'une part :

$$\begin{aligned} \int_{e_t} \mathbf{N}(t, \xi) d\mathbf{v} &= \sum_{\mu \leq 1} \mathbf{v}(\Gamma_{t,\mu} \cap e_t) = \sum_{\lambda} \mathbf{v}(\Gamma_{t,\lambda} \cap e_t) + \sum_i \mathbf{v}(\Gamma_{t,i} \cap e_t) + \sum_j \mathbf{v}(\Gamma_{t,j} \cap e_t) \\ &\leq [\nu_1(t) + \nu_l(t)] \mathbf{v}(e_t) + \sum_j \mathbf{v}(\Gamma_{t,j}) \end{aligned}$$

et, compte tenu des relations (3.17), (3.11), (3.13) et (3.16) :

$$\int_{e_t} \mathbf{N}(t, \xi) d\mathbf{v} \leq \left(\eta_2(t) + \frac{2}{\mathbf{v}(\mathbf{W})} \right) \mathbf{v}(t) (2K\eta_3(t)) + K\varepsilon(t) \eta_1^{2-1}(t) \mathbf{v}(t).$$

On sait que

$$\eta_2(t) = o(1) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \eta_1^{2-1}(t) = \eta_2(t) \eta_3(t) = o(\eta_3(t)),$$

on a donc, toujours pour t suffisamment voisin de sa limite :

$$(3.22) \quad \int_{e_t} \mathbf{N}(t, \xi) d\mathbf{v} \leq 5K\eta_3(t) \mathbf{v}(t)/\mathbf{v}(\mathbf{W}),$$

d'autre part, la propriété 3.1 montre que

$$\left| \int_{\mathbf{W} - e_t} (\mathbf{N}(t, \xi) - \mathbf{N}(t, \xi_0)) d\mathbf{v} \right| < 3\mathbf{v}(\mathbf{W})\eta_2(t)\mathbf{v}(t),$$

cette inégalité, jointe à (3.17) et (3.22) montre que

$$(3.23) \quad |\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\mathbf{W})\mathbf{N}(t, \xi_0)| \leq 2K\eta_3(t)\mathbf{N}(t, \xi_0) + \left[\frac{5K}{\mathbf{v}(\mathbf{W})} \eta_3(t) + 3\mathbf{v}(\mathbf{W})\eta_2(t) \right] \mathbf{v}(t)$$

$\mathbf{N}(t, \xi_0)$ est donc équivalent à $\mathbf{v}(t)/\mathbf{v}(\mathbf{W})$ et $\eta_3(t)\mathbf{N}(t, \xi_0)$ à $\eta_3(t) \mathbf{v}(t)/\mathbf{v}(\mathbf{W})$.

Posons alors :

$$(3.24) \quad \eta(t) = \left(3 + \frac{5}{\mathbf{v}(\mathbf{W})} \right) K\eta_3(t) + 3\mathbf{v}(\mathbf{W})\eta_2(t),$$

on a bien

$$\eta(t) = o(\eta_1^\alpha(t) + \eta_2(t)).$$

La relation (3.23) donne donc la relation (3.20).

C. Q. F. D.

DÉFINITION 3.2 : $N(t)$. — Nous poserons

$$(3.25) \quad N(t) = \mathbf{V}(t)/\mathbf{V}(W).$$

L'égalité (3.20) donne alors (1.3) et la partie *a* du théorème I est démontrée. $N(t)$ apparaît comme un nombre moyen de recouvrement de W par V_t .

§ 4. Points dont la déficience transcendante tend vers zéro; théorème I, *b*. —

DÉFINITIONS 4.1 : — $\delta(t, \xi)$, $\mathfrak{D}(t, \xi)$. — Compte tenu des définitions 1.4 : la déficience transcendante de $\xi \in W$ sera la fonction

$$(4.1) \quad \delta(t, \xi) = 1 - N(t, \xi)/N(t)$$

et la déficience algébrique de ξ sera la fonction

$$(4.2) \quad \mathfrak{D}(t, \xi) = (N(t, \xi) - N(t, \xi))/N(t).$$

REMARQUE 4.1. — Le défaut transcendant de la théorie de Nevanlinna prise sous sa forme différenciée par rapport à $\log r$ peut se généraliser, pour n dimensions, par l'expression $\lim \delta(t, \xi)$; et le défaut algébrique, par $\lim \mathfrak{D}(t, \xi)$. Du théorème I, *a* il résulte que :

PROPRIÉTÉ 4.1. — Pour tous les points ξ de W sauf ceux d'un ensemble de mesure nulle, on a

$$\overline{\lim} \delta(t, \xi) = 0.$$

En effet $\lim \delta(t, \xi) > 0$ signifie que $\xi \in e_t$ quel que soit t , or $\mathbf{V}(e_t)$ tend vers zéro (3.17).

Par contre il peut arriver que $\lim \delta(t, \xi) = 0$ ne soit réalisé pour aucun point ξ de W ⁽¹⁶⁾. Cette circonstance implique nécessairement que tout point ξ appartenant à e_t pour une infinité de valeurs de t , c'est-à-dire que, quel que soit le

⁽¹⁶⁾ On peut en effet former un exemple où pour tout point ξ de W , $\overline{\lim} \delta(t, \xi) = 2$. Indiquons rapidement la méthode : W sera la sphère de surface 1 ($n = 2$, $\alpha = 2$). Soit, sur W , une suite finie de calottes sphériques de rayons ε_p avec $\varepsilon_p > 0$. On définira à la fois V , les V_t et f en formant des feuilletts au-dessus de W par groupes de 2^p à la fois, les 2^p feuilletts d'un même groupe se raccordant entre eux et aux précédents en deux points critiques ayant leurs images dans C_p . En précisant convenablement la formation de ces feuilletts, en prenant comme paramètre $\tau = \log \mathbf{V}(t)$ et en définissant une certaine fonction $\varepsilon(\tau)$ telle que $\varepsilon(p \log 2) = \varepsilon_p$, on a $\mathbf{V}(\tau)/\mathbf{V}(\tau) \leq 2\varepsilon(\tau)$. Par ailleurs on aura formé chaque groupe de 2^p feuilletts de manière à ce qu'il ne recouvre d'abord que la calotte C_p , on aura alors, pour tout $\xi \in C_p$: $N(\tau, \xi) \leq (2 - o(1)) \mathbf{V}(\tau)$. Donc, pour tout point contenu dans une infinité de C_p , on a $\lim \delta(\tau, \xi) = 2$. Or les C_p pourront être disposés sur W de manière à recouvrir une infinité de fois chaque point si et si seulement leur aire totale est infinie, c'est-à-dire $\sum_p \varepsilon_p^2 = +\infty$ ou $\int \varepsilon^2(\tau) d\tau = +\infty$, ce qui signifie exactement que la relation (1.7) n'est pas vérifiée. Cette relation ne peut donc pas être améliorée pour $n = 2$.

voisinage $\nu(t_0)$ de t_0 , on ait

$$\bigcap_l (W - e_l) = \emptyset \quad \text{pour } t \in \nu(t_0).$$

La partie *b* du théorème I montre que cette circonstance est exclue si $\mathfrak{W}(t)/\mathfrak{W}(t)$ tend assez vite vers zéro.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I, *b*. — Nous pouvons imposer à $\eta_2(t)$ la condition supplémentaire :

$$(4.3) \quad \eta_1^\alpha(t) = o(\eta_2(t)).$$

Comme $\eta_3(t) \leq \eta_1^\alpha(t)$ la relation (3.24) donne

$$(4.4) \quad \eta(t) < K' \eta_2(t), \quad \text{avec } K' = 4\mathfrak{W}(W),$$

Nous allons prendre comme paramètre particulier

$$(4.5) \quad \tau = \log N(t), \quad \text{d'où} \quad \tau_0 = \lim \tau = +\infty.$$

DÉFINITIONS 4.2 : u'_τ et u''_τ . u'_τ sera l'ensemble des points ξ de W tels que

$$(4.6) \quad \tau - \log N(\tau, \xi) > K' \eta_2(\tau);$$

u''_τ sera l'ensemble des points ξ de W tels que

$$(4.7) \quad \log N(\tau, \xi) - \tau > K' \eta_2(\tau);$$

$W - u'_\tau - u''_\tau$ sera donc caractérisé par la relation

$$(4.8) \quad \tau - K' \eta_2(\tau) \leq \log N(\tau, \xi) \leq \tau + K' \eta_2(\tau),$$

Soit alors $\xi \in W - e_l$, la relation (3.20) montre que, compte tenu de (3.25) et (4.5), on a

$$\tau + \log(1 - \eta(\tau)) \leq \log N(\tau, \xi) \leq \tau + \log(1 + \eta(\tau)),$$

d'après (4.4) on a pour τ suffisamment grand :

$$\tau - K' \eta_2(\tau) - \tau - \eta(\tau) \leq \log N(\tau, \xi) \leq \tau + \eta(\tau) < \tau + K' \eta_2(\tau),$$

donc ξ satisfait à la relation (4.8) et est dans $W - u'_\tau - u''_\tau$ ainsi que tous les autres points de $W - e_l$; en passant aux complémentaires, on obtient; compte tenu de (3.16) :

$$(4.9) \quad (u'_\tau \cup u''_\tau) \subset e_\tau \quad \text{et} \quad \mathfrak{W}(u'_\tau \cup u''_\tau) \leq 2K\eta_3(\tau) \leq 2K\eta_1^\alpha(\tau).$$

DÉFINITION 4.3 : ensemble e . e sera l'ensemble de tous les points dont la déficiencia transcendantale ne tend pas vers zéro; $W - e$ sera donc caractérisé par

$$(4.10) \quad \delta(t, \xi) = o(1) \quad \text{ou} \quad \delta(\tau, \xi) = o(1).$$

Démontrons la formule

$$(4.11) \quad e \subset \left[\bigcup_{\tau \geq \tau^0} u'_\tau \cup \bigcup_{\tau \geq \tau^0} u''_\tau \right] \quad \text{quel que soit } \tau^0.$$

Passons aux complémentaires; prenons donc un point ξ pour lequel il existe une valeur τ^0 telle que ξ ne soit pas dans l'ensemble représenté par le deuxième membre de (4.11); cela implique que pour tout $\tau \geq \tau^0$ on ait $\xi \in (W - u'_\tau - u''_\tau)$; de la relation (4.8) il résulte que $|\log N(\tau, \xi)/N(\tau)| \leq K' \eta_2(\tau)$, donc que $|\delta(\tau, \xi)| < 2K' \eta_2(\tau)$ qui tend vers zéro; d'après la définition même de e cela signifie que $\xi \in W - e$, ce qui démontre (4.11).

Nous démontrerons le théorème I, b en démontrant que e est de mesure nulle. Pour cela nous prendrons deux systèmes de fonctions $\eta_1(\tau)$ et $\eta_2(\tau)$, l'un étant encore désigné par $\eta_1(\tau)$ et $\eta_2(\tau)$, l'autre étant désigné par $\tilde{\eta}_1(\tau)$ et $\tilde{\eta}_2(\tau)$; les ensembles correspondants seront respectivement u'_τ (ou u''_τ), et $\tilde{u}'_\tau$ (ou $\tilde{u}''_\tau$); puis nous démontrerons les formules

$$(4.12) \quad \lim_{\tau^0 \rightarrow \infty} \mathfrak{p} \left(\bigcup_{\tau \geq \tau^0} \tilde{u}'_\tau \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau^0 \rightarrow \infty} \mathfrak{p} \left(\bigcup_{\tau \geq \tau^0} \tilde{u}''_\tau \right) = 0.$$

en majorant la réunion de la famille continue des $\tilde{u}'_\tau$ (ou $\tilde{u}''_\tau$) par celle d'une famille dénombrable de u'_τ (ou u''_τ).

CHOIX DES INFINIMENT PETITS $\varepsilon(\tau)$, $\eta_1(\tau)$, $\eta_2(\tau)$, $\tilde{\eta}_1(\tau)$ ET $\tilde{\eta}_2(\tau)$. — Nous prendrons pour $\varepsilon(\tau) = \tilde{\varepsilon}(\tau)$ la fonction non croissante qui, par hypothèse satisfait à la relation (4.7); nous écrivons

$$(4.13) \quad \int_{\Theta} \varepsilon^\alpha(\tau) d\tau > +\infty, \quad \text{avec} \quad \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \leq 0.$$

On sait qu'il existe alors une fonction, qui sera par définition $\eta_1(\tau)$, telle que l'on ait

$$(4.14) \quad \eta_1(\tau) = o(1); \quad \varepsilon(\tau) = o(\eta_1(\tau)) \quad \text{et} \quad d \frac{\varepsilon(\tau)}{\eta_1(\tau)} / d\tau \leq 0$$

et, de plus :

$$(4.15) \quad \int_{\Theta} \eta_1^\alpha(\tau) d\tau < +\infty, \quad \text{avec} \quad d(\eta_1(\tau))/d\tau \leq 0.$$

Les relations de définition (3.2) sont bien vérifiées.

En vertu de (4.15) il existe une fonction non croissante $\varphi(\tau)$ telle que

$$\varphi(\tau) = o(1) \quad \text{et} \quad \int_{\Theta} \frac{\eta_1^\alpha(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau < +\infty.$$

Nous pourrions alors prendre la fonction $\eta_2(t)$ telle que

$$(4.16) \quad \eta_2(\tau) = o(1); \quad \varepsilon(\tau)/\eta_1(\tau) = o(\eta_2(\tau)) \quad \text{et} \quad \varphi(\tau) \leq \eta_2(\tau)$$

et comme $\varphi(\tau)$ et $\varepsilon(\tau)/\eta_1(\tau)$ sont non croissants $\eta_2(\tau)$ pourra vérifier en outre :

$$(4.17) \quad -1/2 \leq K'(d\eta_2(\tau)/d\tau) \leq 0.$$

La relation $\varphi(\tau) < \eta_2(\tau)$ et la relation (4.16) donnent

$$(4.18) \quad \int_{\Theta} \frac{\eta_1^\alpha(\tau)}{\eta_2(\tau)} d\tau < +\infty.$$

Posons maintenant :

$$(4.19) \quad \tilde{\eta}_1(\tau) = \frac{1}{2} \eta_1(\tau).$$

puis définissons $\tilde{\eta}_2(\tau)$ par les conditions suivantes qui sont compatibles entre elles en vertu de (4.17) :

$$(4.20) \quad \tilde{\eta}_2(\tau) = 0(1); \quad \tilde{\eta}_2(\tau) \geq 2\eta_2(\tau)$$

et

$$(4.21) \quad -1 \leq K' d\tilde{\eta}_2(\tau)/d\tau \leq 0.$$

Comme $\tilde{\varepsilon}(\tau) = \varepsilon(\tau)$, les conditions (4.16) entraînent les conditions de définition (3.3) relatives à $\tilde{\eta}_2(\tau)$.

CALCUL DE $\mathfrak{V}\left(\bigcup_{\tau \geq \tau_0} \tilde{u}_\tau\right)$. — Nous allons déterminer une suite dénombrable de valeurs de $\tau : \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots$ qui déterminera une partition de Θ en ensembles $\Theta_i = \Theta \cap [\tau_i, \tau_{i+1}[$ de façon que l'on ait :

$$(4.22) \quad \text{pour } \tau \in \Theta_i : \quad \tau - K'\tilde{\eta}_2(\tau) < \tau_i - K'\eta_2(\tau_i).$$

En vertu de (4.20) cette relation est vérifiée pour $\tau = \tau_i$ et, en vertu de la deuxième inégalité de (4.21) son premier membre est une fonction non décroissante. L'ensemble des valeurs pour lesquelles (4.22) n'est pas vérifié est fermé dans $\mathbb{R}^1$; en prenant pour τ_{i+1} la borne inférieure de cet ensemble on voit que (4.22) est vérifié et que, de plus, on a

$$\tau_{i+1} - K'\tilde{\eta}_2(\tau_{i+1}) \geq \tau_i - K'\eta_2(\tau_i)$$

ou

$$\tau_{i+1} - \tau_i + K'(\tilde{\eta}_2(\tau_i) - \tilde{\eta}_2(\tau_{i+1})) \geq K'(\tilde{\eta}_2(\tau_i) - \eta_2(\tau_i)) \geq K'\eta_2(\tau_i)$$

de la première inégalité (4.21), on tire

$$K'(\tilde{\eta}_2(\tau_i) - \tilde{\eta}_2(\tau_{i+1})) \leq \tau_{i+1} - \tau_i;$$

donc il vient

$$(4.23) \quad 2(\tau_{i+1} - \tau_i) \geq K'\eta_2(\tau_i).$$

Soit alors $\xi \in u'_\tau$, $\tau \in \Theta_i$; la relation (4.22) est applicable ainsi que (4.6) [pour $\tilde{\eta}_2(\tau)$]; et comme $N(\tau, \xi)$ est non décroissant il vient

$$\log N(\tau_i, \xi) \leq \log N(\tau, \xi) \leq \tau - K'\tilde{\eta}_2(\tau) \leq \tau_i - K'\eta_2(\tau_i)$$

La comparaison des termes extrêmes montre que, d'après la définition même de u'_τ on a $\xi \in u'_\tau$. Donc

$$(4.24) \quad \text{pour } \tau \in \Theta_i; \quad \tilde{u}'_\tau \subset u'_{\tau_i}, \quad \text{donc} \quad \bigcup_{\tau_i \leq \tau < \tau_{i+1}} \tilde{u}'_\tau \subset u'_{\tau_i},$$

on en déduit, compte tenu de (4.9) :

$$\mathfrak{V}\left(\bigcup_{\tau > \tau^0} \tilde{u}'_\tau\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{J}} \mathfrak{V}(u'_{\tau_i}) \leq 2K \sum_{i \in \mathbb{J}} \eta_1^\alpha(\tau_i), \quad \text{avec} \quad \tau_j < \tau^0 < \tau_{j+1}.$$

La première relation de (4.12) sera vérifiée si $\sum_i \eta_1^z(\tau_i)$ est une série convergente. Comme $\eta_1^z(\tau)$ est une fonction non croissante (4.15) et $\tau_{i+1} - \tau_i \geq K' \eta_2(\tau_i)$ (4.23), la convergence de cette série sera assurée par celle de l'intégrale $\int_{\Theta} \frac{\eta_1^z(\tau)}{\eta_2(\tau)} d\tau$. Or, cette intégrale est convergente (4.18). La première relation de (4.12) est donc démontrée.

CALCUL DE $\mathfrak{V}\left(\bigcup_{\tau \geq \tau^0} \tilde{u}_\tau''\right)$. — Déterminons une partition de Θ en ensembles $\Theta_j = \Theta \cap [\tau_j, \tau_{j+1}[$. Pour définir τ_{j+1} à partir de τ_j , considérons l'inégalité (4.25)

$$\tau + K' \eta_2(\tau) \leq \tau_j + K' \tilde{\eta}_2(\tau_j),$$

son premier membre est une fonction non décroissante de τ [première inégalité (4.17)]. L'ensemble des valeurs qui la vérifient peut s'écrire : $\Theta \cap]-\infty, \tau']$. Il comprend τ_j en vertu de (4.20).

Premier cas : $\tau' = \tau_j$, comme l'inégalité (4.25) est stricte pour $\tau = \tau_j$, ce cas n'est possible que si τ_j est la borne inférieure d'un intervalle ouvert, non vide, de $\mathbb{R}^1 - \Theta$; sa borne supérieure, située dans Θ , sera, par définition, τ_{j+1} ; on aura $\tau_{j+1} > \tau_j$ et $\Theta = \{\tau_j\}$.

Deuxième cas : $\tau' > \tau_j$, nous poserons alors $\tau_{j+1} = \tau'$, τ_{j+1} vérifie (4.25).

Dans les deux cas la relation (4.25) est vérifiée par tous les éléments de $\Theta_j = \Theta \cap [\tau_j, \tau_{j+1}[$ et par aucun $\tau > \tau_{j+1}$. En particulier

$$\tau_{j+2} + K' \eta_2(\tau_{j+2}) > \tau_j + K' \tilde{\eta}_2(\tau_j),$$

donc, en vertu de la décroissance de $\eta_2(\tau)$ et de (4.20) :

$$(4.26) \quad \tau_{j+2} - \tau_j > K' \tilde{\eta}_2(\tau_j) - K' \eta_2(\tau_{j+2}) \geq K' [\tilde{\eta}_2(\tau_j) - K' \eta_2(\tau_j)] \geq K' \eta_2(\tau).$$

Soit $\xi \in \tilde{u}_\tau''$, $\tau \in \Theta_j$. (4.7) est applicable [pour $\tilde{\eta}_2(\tau)$]. Dans le premier cas, $\Theta_j = \{\tau_j\}$ et il vient, compte tenu de (4.20) :

$$(4.27) \quad \log N(\tau_j, \xi) = \log N(\tau, \xi) > \tau + K' \tilde{\eta}_2(\tau) > \tau + K' \eta_2(\tau) = \tau_j + K' \eta_2(\tau_j).$$

Dans le deuxième cas τ_{j+1} vérifie (4.25) : on a, compte tenu de (4.21) :

$$\tau_{j+1} + K' \eta_2(\tau_{j+1}) \leq \tau_j + K' \tilde{\eta}_2(\tau_j) \leq \tau + K' \tilde{\eta}_2(\tau),$$

on a donc :

$$(4.28) \quad \log N(\tau_{j+1}, \xi) \geq \log N(\tau, \xi) \geq \tau + K' \tilde{\eta}_2(\tau) \geq \tau_{j+1} + K' \eta_2(\tau_{j+1})$$

la comparaison, dans (4.27) et (4.28) des termes extrêmes montre, d'après (4.7), que, dans les deux cas possibles, $\xi \in \tilde{u}_\tau''$ avec $\tau \in \Theta_j$, entraîne $\xi \in u_j'' \cup u_{j+1}''$. Donc

$$(4.29) \quad \text{pour } \tau \in \Theta_j; \quad \tilde{u}_\tau'' \subset u_\tau'' \cup u_{\tau_{j+1}}''; \quad \bigcup_{\tau_j < \tau < \tau_{j+1}} \tilde{u}_\tau'' \subset u_\tau'' \cup u_{\tau_{j+1}}''$$

Il suffit maintenant de reprendre le raisonnement fait à partir de la relation (4.24) pour montrer que $\mathfrak{U}\left(\bigcup_{\tau>\tau^0}\tilde{u}_\tau''\right)$ tend vers zéro quand τ^0 tend vers l'infini. Les relations (4.12) sont démontrées et, en vertu de (4.11), elles entraînent que e est de mesure nulle, ce qui démontre la partie b du théorème III.

Le théorème IV, a en sera une application.

II. — Applications régulières et paraboliques.

§ 5. **Rappel de définitions et de résultats.** — Rappelons les définitions du Mémoire [A] ⁽¹⁷⁾ relatives aux applications régulières.

TRIANGULATION RÉGULIÈRE DE V. — Nous désignerons par $D_i'^k$ les simplexes ouverts d'une triangulation (D') de V et par $\overline{D}_i'^k$ les simplexes fermés.

DÉFINITION 5.1 (définition [A], 1.4). — Une triangulation (D') de V sera dite régulière si elle est l'image d'un complexe simplicial euclidien $(\hat{D}')$ par un homéomorphisme φ conservant la structure de complexe et vérifiant les conditions suivantes :

(TR)₁ la restriction de φ à tout simplexe fermé $\hat{D}_i'^k$ de $(\hat{D}')$ est un homéomorphisme unidifférentiable de classe C_2 de $\hat{D}_i'^k$ sur $\overline{D}_i'^k$;

(TR)₂ la restriction de φ à tout simplexe ouvert $\hat{D}_i'^k$ de $(\hat{D}')$ est un homéomorphisme bidifférentiable de classe C_2 de $\hat{D}_i'^k$ sur la sous-variété différentiable $D_i'^k$ de V .

NOTATIONS 5.1. — Les éléments, homologues par φ^{-1} d'éléments relatifs à V sont désignés par les mêmes lettres munies d'un accent circonflexe. On a $\hat{V} = \varphi^{-1}(V)$.

$D_i'^k(x)$ désigne le simplexe ouvert de (D') qui contient un point x de V .

DÉFINITION 5.2. — *Vecteur spéciaux.* — Un vecteur spécial est un vecteur non nul tangent en x à $D_i'^k(x)$, l'ensemble des vecteurs spéciaux forment le sous-espace $\mathfrak{V}_s$ de l'espace $\mathfrak{V}$ des vecteurs non nuls tangents à V . D'après (TR)₂, φ^{-1} est extensible à l'espace $\mathfrak{V}_s$ en une application $\tilde{\varphi}^{-1}$, $\tilde{\varphi}^{-1}(\mathfrak{V}_s) \equiv \hat{\mathfrak{V}}_s$, espace des vecteurs spéciaux pour $\hat{V}$.

APPLICATIONS RÉGULIÈRES. — **DÉFINITION 5.3** (définition [A], 2.1). — Une application f de $\hat{V}$ dans W sera dite régulière si elle satisfait aux conditions suivantes :

⁽¹⁷⁾ [A] désigne notre Mémoire [2] qui paraît aux *Acta mathematica*. Il contient des précisions sur les définitions que nous rappelons dans ce paragraphe et les démonstrations des différentes formules et propriétés que nous énonçons ici. Nous appelons (D') et (D'') les triangulations (D) et (D') du Mémoire [A].

(AR)₁ f est continue de classe C_2 ;

(AR)₂ il existe une triangulation régulière (D') de V telle que la restriction de f à tout simplexe topologique D_i^k de (D') soit un homéomorphisme bidifférentiable de classe C_2 de D_i^k sur une sous-variété différentiable Δ_i^k de W .

Soit $\mathfrak{W}^+$ (resp. $\mathfrak{W}$) l'espace des vecteurs (resp. vecteurs non nuls) tangents à W . f est extensible en une application $\tilde{f}$ de $\mathfrak{W}$ dans $\mathfrak{W}^+$; on a, d'après (AR)₂, $f(\mathfrak{W}_s) \subset \mathfrak{W}$.

DÉFINITION 5.4. — *Sous-variété transversale de dimension $n - 1$, sans bord.* — C'est une sous-variété Γ le long de laquelle on peut définir un champ $\mathcal{K}$ de vecteurs spéciaux qui la coupent transversalement avec les conditions de différentiabilité suivantes : $\hat{\Gamma} = \varphi^{-1}(\Gamma)$ est différentiable sur chaque $\hat{\Gamma} \cap \hat{D}_i^k$, le champ $\mathcal{K}$ est continu par rapport à $\hat{x} = \varphi^{-1}(x) \in \hat{\Gamma}$ ⁽¹⁸⁾.

CARACTÉRISTIQUE χ_f . DÉFINITION 5.5 (définition [A], 19.1). — Soit C une sous-variété topologique de V qui admette pour triangulation un sous-complexe d'une subdivision (D'') de (D') . Le degré topologique local de f est le même en tous les points de D_i^k , donc de D_i^{n-k} , on le note $m(D_i^k)$ ou $m(D_i^{n-k})$; on a

$$(5.1) \quad \chi_f(C) = \sum_{i,k} (-1)^k m(D_i^{n-k}) \quad \text{pour } D_i^{n-k} \subset C,$$

χ_f est indépendant du choix des triangulations (D') et (D'') . Si f est l'identité, χ_f est la caractéristique d'Euler-Poincaré χ .

DÉFINITION 5.6 ([A], § 18, formes différentielles Ω_0^* et Π^*). — Nous appelons Ω_0 une forme différentielle de degré n définie sur W et dont l'intégrale sur W est $\chi(W)$. Nous appelons Π une forme différentielle de degré $n - 1$ définie sur $\mathfrak{W}$, dont la restriction à chaque fibre appartient à la classe fondamentale et telle que, π étant l'application canonique de $\mathfrak{W}$ (resp. V) sur W (resp. V) on ait

$$(5.2) \quad \pi^* \Omega_0 = - d\Pi,$$

on pose

$$(5.3) \quad \Omega_0^* = f^* \Omega_0 \quad \text{et} \quad \Pi^* = \tilde{f}^* \Pi$$

d'où, dans $\mathfrak{W}_s$:

$$(5.4) \quad \pi^* \Omega_0^* = - d\Pi^*.$$

PROPRIÉTÉ 5.1 (première formule du théorème II de [A]). — On a ⁽¹⁹⁾

$$(5.5) \quad \int_C \Omega_0^* = \int_{\mathcal{K}^{-1}(C)} \Pi^* + \chi_f(C),$$

⁽¹⁸⁾ Aux conditions de différentiabilité près cela signifie que Γ coupe canoniquement chaque simplexe D_i^k avec une condition supplémentaire dont nous ne savons pas si elle est toujours réalisée ou non (voir [A], § 8).

⁽¹⁹⁾ Cette formule est apparentée à la formule de Gauss-Bonnet généralisée, on peut prendre pour Ω_0 la forme différentielle de courbure totale relative à un ds^2 particulier sur W .

C étant une sous-variété à n dimensions de V dont le bord $\dot{C}$ est transversal par rapport à (D') et $\mathcal{K}^+(C)$ est le relèvement de $\dot{C}$ dans $\mathfrak{V}$, défini par un champ $\mathcal{K}^+$ de vecteurs spéciaux (qui existent d'après la définition 5.4) qui sont pris *sortants par rapport* à C . Le cycle $\mathcal{K}^+(\dot{C})$ doit être considéré comme image différentiable de $\hat{C} = \varphi^{-1}(\dot{C})$, et de $\dot{C}$ lui-même dans le cas particulier où (D') est une triangulation différentiable.

§ 6. THÉOREME II. — Soit f une application de V dans W régulière et parabolique pour les variétés d'approche V_i , les V_i sont supposées être transversales par rapport à une triangulation (D') relative à l'application régulière f , on a les relations

$$(6.1) \quad \frac{1}{N(t)} \int_{\mathcal{K}^+(V_i)} -\Pi^* + \frac{\chi_f(V_i)}{N(t)} = \chi(W) + o(1)$$

et

$$(6.2) \quad \frac{1}{N(t)} \int_{\mathcal{K}^+(V_i)} -\Pi^* + \frac{1}{N(t)} \sum_{\Pi_i^k \subset V_i} (-1)^k (m(D_i^{n_k}) - 1) + \frac{\chi(V_i)}{N(t)} = \chi(W) + o(1).$$

La seconde formule résulte de la première et de la définition de χ_f [formule (5.1)]. Or pour déduire la formule (6.1) de la formule (5.5) il suffit de démontrer la formule suivante :

$$(6.3) \quad \int_{V_i} \Omega_0^* = N(t) \chi(W) + o(N(t)),$$

or, on a

$$\int_{V_i} \Omega_0^* = \int_W N(t, \xi) \Omega_0 = N(t) \int_W \Omega_0 + \int_W (N(t, \xi) - N(t)) \Omega_0$$

ou

$$(6.4) \quad \int_{V_i} \Omega_0^* = N(t) \chi(W) + \int_{c_t} N(t, \xi) \Omega_0 - N(t) \int_{c_t} \Omega_0 + \int_{W-c_t} (N(t, \xi) - N(t)) \Omega_0,$$

Ω_0 est une forme régulière sur toute la variété compacte W ; on obtient donc, à un facteur fini près qui dépend de la métrique, des bornes supérieures des trois dernières intégrales écrites, en y remplaçant la forme Ω_0 par la forme $d\mathfrak{V}$. Des relations (1.5) il résulte alors que la première de ces intégrales et le produit de la deuxième par $N(t)$ sont $o(N(t))$; de (1.6) il résulte que la troisième est aussi $o(N(t))$; la relation (6.4) se réduit donc à (6.3).

C. Q. F. D.,

REMARQUE 6.1. — La démonstration précédente montre que la formule (6.1) résulte uniquement de la formule fondamentale (5.5) et des relations (1.5) et (1.6); on pourra donc l'appliquer à des applications régulières non nécessairement paraboliques pourvu que, pour une famille de variétés V_i , les relations (1.5) et (1.6) soient vérifiées.

EXEMPLE 6.1. — Revenons au cas classique d'une fonction méromorphe dans le plan complexe C . Elle définit une application f de $V = R^2$ (ou $V = C$) dans $W = S^2$ (ou dans $W = PC$); f est une application régulière qui conserve

l'orientation. Appelons V_t le disque $|z| \leq t$, $z \in \mathbb{C}$. L'ensemble des points de $f(\dot{V}_t)$ admet une structure de complexe différentiable (rappelons que V_t ne passe par aucun des points où m est > 1). Appelons Θ le complémentaire, dans la demi-droite réelle positive d'une suite d'intervalles ouverts dont la somme des mesures logarithmique est finie. Ahlfors a montré ⁽²⁰⁾ que l'on peut choisir pour t un domaine de variation Θ de manière à ce que soient vérifiées la formule (1.1) et même la formule (1.7).

On en conclut que f est une application régulière, parabolique, à laquelle peuvent s'appliquer tous les résultats des théorèmes I et II; nous les formulerons, pour ce cas particulier, dans le théorème IV (§ 14).

III. — Applications régulières pseudo-simpliciales et paraboliques.

§ 7. Applications régulières a pseudo-simpliciales. — DÉFINITION 7.1. — L'application régulière f de V dans W sera dite pseudo-simpliciale s'il existe une triangulation (Δ) de W et une partition de V en parties D_i^k de manière que :

- a. $\bar{D}_i^k$, adhérence de D_i^k dans V , soit un sous-complexe de (D) ;
- b. la restriction de f à chaque D_i^k soit un homéomorphisme sur un simplexe Δ_i^k de (Δ) .

On a donc

$$(7.1) \quad f(D_i^k) = \Delta_i^k.$$

DÉFINITION 7.2. — Espace $\tilde{V}$ complété de V . — Nous avons supposé une métrique choisie riemannienne choisie sur W et avons appelé métrique image réciproque, celle de V définie par une forme quadratique image réciproque de celle de la métrique de W . Cette métrique de V est séparée et il lui correspond une structure uniforme, donc un espace séparé complet $\tilde{V}$ où V est dense.

Deux points $\tilde{u}'$ et $\tilde{u}''$ de $\tilde{V}$, définis comme limites de suites de Cauchy sur V , seront confondus si, et si seulement, il existe un chemin $(\tilde{u}'$ et $\tilde{u}'')$ de longueur arbitrairement petite dont tous les points, sauf peut-être $\tilde{u}'$ et $\tilde{u}''$, sont dans V .

DÉFINITION 7.3. — Nous appellerons $\tilde{f}$ ⁽²¹⁾ le prolongement continu de f dans $\tilde{V}$.

PROPRIÉTÉ 7.1. — Sur l'adhérence $\tilde{D}_i^k$ de D_i^k dans $\tilde{V}$, $\tilde{f}$ est un homéomorphisme sur un simplexe fermé $\tilde{\Delta}_i^k$ de (Δ) . On a

$$(7.2) \quad \tilde{f}(\tilde{D}_i^k) = \tilde{\Delta}_i^k.$$

DÉFINITIONS 7.4. — $\tilde{D}_i^k$ étant donc un simplexe, nous pourrions appeler D_i^k ,

⁽²⁰⁾ Cf. Nevanlinna [1], p. 340.

⁽²¹⁾ Nous adoptons ici le symbole $\tilde{f}$ pour distinguer ce prolongement de f à $\tilde{V}$ du prolongement $\tilde{f}$ de f à V^+ défini au paragraphe 5.

simplexe ouvert. La partition (D) de V en simplexes ouverts D_i^k sera appelée triangulation non bornée de V.

PROPRIÉTÉ 7.2. — *En tous les points de D_i^k le degré topologique local de f est égal à un même nombre $m(D_i^k)$.*

Le raisonnement qui démontre la propriété 13.1 du Mémoire [A] reste, en effet, entièrement applicable.

PROPRIÉTÉ 7.3. — *Soit $\text{Et}(\alpha)$ l'étoile ouverte, dans (Δ) , d'un point α de W. Toute composante connexe $\tilde{E}_i$ de $\tilde{f}^{-1}(\text{Et}(\alpha))$ contient un point $\tilde{\alpha}$ et un seul tel que $\tilde{f}(\tilde{\alpha}) = \alpha$.*

1° $\tilde{E}_i$ contient au moins un point $\tilde{\alpha}_i$. Soient, en effet, $x \in \tilde{E}_i \cap V$, $\xi = f(x) \in \text{Et}(\alpha)$ et Δ_i^k le simplexe ouvert de (Δ) qui contient ξ ; $\Delta_i^k \cap \text{Et}(\alpha)$ contient α et est connexe. La composante connexe de son image réciproque qui contient ξ lui est homéomorphe d'après la propriété 7.1, l'homéomorphisme étant la restriction de $\tilde{f}$; donc cette composante connexe contient un point $\tilde{\alpha}_i \in \tilde{f}^{-1}(\alpha)$; comme elle rencontre $\tilde{E}_i$ en x elle est elle-même dans $\tilde{E}_i$; donc le point $\tilde{\alpha}$ est dans $\tilde{E}_i$.

2° E_i ne peut pas contenir deux points distincts de $\tilde{f}^{-1}(\alpha)$. Soient, en effet $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ deux points de $\tilde{f}^{-1}(\alpha)$; ils peuvent être joints, dans $\tilde{E}_i$, par un chemin $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ dont tous les points, sauf peut-être $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$, sont dans $V - (D)^{n-2}$; son image, $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ est un chemin qui se referme en α (avec ou sans autres points doubles) et dont tous les points, sauf peut-être α , sont dans $W - (\Delta)^{n-2}$; un tel chemin est continûment réductible, dans $\text{Et}(\alpha)$, au point α sans rencontrer $(\Delta)^{n-2}$ en d'autres points [si (Δ) était un complexe euclidien, il suffirait de procéder par homothétie]. Dans cette réduction l'image réciproque du point continue à joindre $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ et pourtant sa longueur (qui est la même que celle du chemin sur W) tend vers zéro. Il en résulte que $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ ne peuvent pas être distincts sur V.

C. Q. F. D.

REMARQUE 7.1. — $\text{Et}(\alpha)$ ne dépend que du simplexe Δ_i^k qui contient α , nous pouvons l'appeler étoile ouverte de Δ_i^k dans (Δ) et noter

$$(7.3) \quad \text{Et}(\Delta_i^k) = \text{Et}(\alpha_i^k) \quad \text{si} \quad \alpha_i^k \in \Delta_i^k.$$

Appelons $\tilde{E}_{ij}$ une composante connexe de $\tilde{f}^{-1}(\text{Et}(\Delta_i^k))$ et posons

$$(7.4) \quad \tilde{D}_{ij}^k = \tilde{f}^{-1}(\Delta_i^k) \cap \tilde{E}_{ij}.$$

De (7.3) et de la propriété 7.3 il résulte que la restriction de $\tilde{f}$ à $\tilde{D}_{ij}^k$ est une application biunivoque sur Δ_i^k .

De la définition 7.1 on déduit que

$$(7.5) \quad \tilde{D}_{ij}^k \cap V \neq \emptyset \quad \text{entraîne} \quad \tilde{D}_{ij}^k = D_{ij}^k \subset V.$$

DÉFINITION 7.5. — *Ensemble $\mathfrak{A}$ de points $\mathfrak{a}_i^k$.* — Ce sera un ensemble fini de points de W tel que chaque Δ_i^k en contienne un et un seul que nous noterons $\mathfrak{a}_i^k$. Nous noterons $f^{-1}(\mathfrak{A})$ l'ensemble des points a_j^k de V dont l'image est un point $\mathfrak{a}_i^k$ de $\mathfrak{A}$.

DÉFINITION 7.6. — *Arbre topologique.* — Supposons fixé un ensemble $\mathfrak{A}$ de points $\mathfrak{a}_i^k$; joignons chaque point $\mathfrak{a}_i^n \in \Delta_i^n$ à chacun des points $\mathfrak{a}_i^{n-1} \in \Delta_i^{n-1} \subset \Delta_i^n$, par un chemin différentiable par morceaux. Soit Λ le complexe fini, réunion de ces chemins : son image réciproque, $f^{-1}(\Lambda)$ sera, par définition un arbre topologique, dans V , de l'application f .

Les chemins $(a_i^n, a_j^{n-1}, a_j^n)$ seront dits rameaux de l'arbre topologique $[a_i^n, a_j^{n-1}]$ et a_j^n étant des éléments de $f^{-1}(\mathfrak{A})$.

DÉFINITION 7.7. — Nous dirons qu'un *arbre topologique est de caractère parabolique* relativement à une famille de variétés d'approche V_i si, $v(t)$ étant le nombre des rameaux de l'arbre topologique qui ont une extrémité dans V_i et l'autre dans $V - V_i$, on a

$$(7.6) \quad v(t) = o(N(t)).$$

§ 8. Définitions des déficiences des points et des simplexes. — Soit f une application régulière et pseudo-simpliciale, parabolique pour la famille des variétés d'approche V_i .

DÉFINITIONS 8.1. — Supposons qu'à chaque simplexe ouvert (borné ou non) D_j^k de (D) et à chaque variété V_i nous ayons associé un coefficient $\theta(t, D_j^k)$ de D^k dans V_i tel que

$$(8.1) \quad 0 \leq \theta(t, D_j^k) \leq 1;$$

$$(8.2) \quad \theta(t, D_j^k) = 1 \quad \text{si } D_j^k \subset V_i; \quad \theta(t, D_j^k) = 0 \quad \text{si } D_j^k \subset V - V_i.$$

Nous formerons les sommes finies suivantes :

$$(8.3) \quad N_0(t, \Delta_i^k) = \sum_j \theta(t, D_{ij}^k) m(D_{ij}^k) \quad \text{pour } f(D_{ij}^k) = \Delta_i^k;$$

$$(8.4) \quad N_0(t, \Delta_i^k) = \sum_j \theta(t, D_{ij}^k) \quad \text{pour } f(D_{ij}^k) = \Delta_i^k;$$

$$(8.5) \quad \delta_0(t, \Delta_i^k) = 1 - N(t, \Delta_i^k)/N(t) \quad (\text{déficiency transcendante de } \Delta_i^k);$$

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}_0(t, \Delta_i^k) &= \frac{1}{N(t)} \sum_j \theta(t, D_{ij}^k) (m(D_{ij}^k) - 1) \quad \text{pour } f(D_{ij}^k) = \Delta_i^k, \\ &= \frac{1}{N(t)} (N(t, \Delta_i^k) - N(t, \Delta_i^k)) \quad (\text{déficiency algébrique de } \Delta_i^k). \end{aligned}$$

REMARQUE 8.1. — Comme f conserve l'orientation, la propriété 17.1 du Mémoire [A] est applicable, donc

$$\mathfrak{S}_0(t, \Delta_i^n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}_0(t, \Delta_i^{n-1}) = 0.$$

De ces définitions on déduit :

$$(8.7) \quad \delta_0(t, \Delta_i^k) + \mathfrak{P}_0(t, \Delta_i^k) + \bar{N}_0(t, \Delta_i^k)/N(t) = 1.$$

d'où

$$(8.8) \quad \sum_{i, k \leq n} (-1)^k \delta_0(t, \Delta_i^k) + \sum_{i, k \leq n} (-1)^k \mathfrak{P}_0(t, \Delta_i^k) + \frac{1}{N(t)} \sum_{j, k \leq n} (-1)^k \theta(t, D_j^k) = \chi(W).$$

DEFINITIONS 8.2. — *Déficiences globales relatives à θ et terme complémentaire.* — La déficience transcendante globale sera la fonction

$$(8.9) \quad \text{Trs}_\theta(t) = \sum_{i, k \leq n-2} (-1)^k \delta_\theta(t, \Delta_i^k).$$

La déficience algébrique globale sera la fonction

$$(8.10) \quad \text{Alg}_\theta(t) = \sum_{i, k \leq n-2} (-1)^k \mathfrak{P}_\theta(t, \Delta_i^k) = \sum_{i, k \leq n} (-1)^k \mathfrak{P}_\theta(t, \Delta_i^k).$$

la seconde égalité résulte de la remarque 8.1.

Nous appellerons terme complémentaire relativement à θ , la fonction

$$(8.11) \quad \mathcal{C}_\theta(t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{i, k \leq n} (-1)^k N_\theta(t, \Delta_i^k) = \frac{1}{N(t)} \sum_{j, k \leq n} (-1)^k \theta(t, D_j^k).$$

Choix du coefficient $\theta(t, D_j^k)$. — Nous allons fixer tous les $\theta(t, D_j^k)$ par le choix d'un ensemble $\mathfrak{A}$ de points $\mathfrak{a}_i^k$ (définition 7.5). Chaque D_j^k contient un point et un seul, $\mathfrak{a}_j^k$, de l'ensemble $f^{-1}(\mathfrak{A})$; conformément à une notation déjà utilisée à la remarque 22.1 de [A], nous poserons

$$(8.12) \quad \theta(t, D_j^k) = \theta(t, \mathfrak{a}_i^k) \begin{cases} = 1 & \text{si } \mathfrak{a}_i^k \in V_i, \\ = 0 & \text{si } \mathfrak{a}_i^k \in V - V_i. \end{cases}$$

Les définitions 4.4, 4.1, 8.1 et 8.2 donnent

$$(8.13) \quad \begin{cases} N_\theta(t, \Delta_i^k) = N(t, \mathfrak{a}_i^k); & \bar{N}_\theta(t, \Delta_i^k) = \bar{N}(t, \mathfrak{a}_i^k); \\ \delta_\theta(t, \Delta_i^k) = \delta(t, \mathfrak{a}_i^k); & \mathfrak{P}_\theta(t, \Delta_i^k) = \mathfrak{P}(t, \mathfrak{a}_i^k); \end{cases}$$

$$(8.14) \quad \text{Trs}_\theta(t) = \sum_{i, k \leq n-2} (-1)^k \bar{N}(t, \mathfrak{a}_i^k); \quad \text{Alg}_\theta(t) = \sum_{i, k \leq n-2} (-1)^k \mathfrak{P}(t, \mathfrak{a}_i^k);$$

$$(8.15) \quad \mathcal{C}_\theta(t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{i, k \leq n} (-1)^k \bar{N}(t, \mathfrak{a}_i^k) = \frac{1}{N(t)} \sum_{j, k \leq n} (-1)^k \theta(t, D_j^k).$$

NOTATION 8.1. — *Cas de suppression de l'indice θ .* — 1° Si $\bar{N}_\theta(t, \Delta_i^k) = \bar{N}(t, \mathfrak{a}_i^k)$ est, à $o(N(t))$ près, indépendant du point $\mathfrak{a}_i^k$ choisi sur Δ_i^k , nous définirons $\bar{N}(t, \Delta_i^k)$ à $o(N(t))$ près par

$$(8.16) \quad \bar{N}(t, \Delta_i^k) = \bar{N}_\theta(t, \Delta_i^k) + o(N(t)); \quad \text{d'où} \quad \mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_\theta(t) + o(1).$$

2° S'il en est de même pour $N_\theta(t, \Delta_i^k)$ nous définirons $N(t, \Delta_i^k)$ à $o(N(t))$ près et $\delta(t, \Delta_i^k)$, $\mathfrak{P}(t, \Delta_i^k)$, $\text{Trs}(t)$ et $\text{Alg}(t)$ à $o(1)$ près toujours par suppression des indices θ dans les symboles correspondants.

REMARQUE 8.1. — Nous avons défini dans [A] (§ 3) le champ barycentrique de vecteurs spéciaux X dans le cas où (D) est une triangulation bornée, l'ensemble de ses zéros peut alors être $f^{-1}(\mathfrak{A})$; on pourrait, moyennant une construction supplémentaire, définir un champ analogue dans le cas où (D) est non bornée et généraliser ainsi la propriété que nous donnons seulement sous la forme suivante :

PROPRIÉTÉ 8.1. — Soit f une application régulière, pseudo-simpliciale, parabolique pour la famille des variétés d'approche V_t . Supposons que la triangulation (D) soit bornée, soit alors $X_{\mathfrak{A}}$ le champ barycentrique dont l'ensemble des zéros est $f^{-1}(\mathfrak{A})$; on a

$$(8.17) \quad \sum_{i, k \leq n} (-1)^k \delta(t, \alpha_i^k) = \frac{1}{N(t)} \int_{X_{\mathfrak{A}}(\hat{V}_t)} -\Pi^* + o(1) \quad (\alpha_i^k \in \mathfrak{A}).$$

On déduit, en effet, de la définition de $\delta(t, \alpha_i^k)$, des formules (8.3), (8.4) et (8.13) que

$$\delta(t, \alpha_i^k) + \frac{1}{N(t)} \sum_j \theta(t, \alpha_{ij}^k) m(D_{ij}^k) = 1 \quad \text{pour } \alpha_{ij}^k \in f^{-1}(\alpha_i^k)$$

et

$$(8.18) \quad \sum_{i, k \leq n} (-1)^k \delta(t, \alpha_i^k) + \frac{1}{N(t)} \sum_{j, k \leq n} (-1)^k \theta(t, \alpha_j^k) m(D_j^k) = \chi(W).$$

Reportons-nous alors à la formule (22.5) de [A], compte tenu de (6.3), elle s'écrit :

$$(8.19) \quad \frac{1}{N(t)} \int_{X_{\mathfrak{A}}(\hat{V}_t)} -\Pi^* + \frac{1}{N(t)} \sum_{j, k \leq n} (-1)^k \theta(t, \alpha_j^k) m(D_j^k) = \chi(W) + o(1).$$

Ces deux dernières formules donnent, par soustraction, la formule (8.17).

REMARQUE 8.2. — De la démonstration de (22.5) de [A] il résulte que (8.17) est valable même pour des bords $\hat{V}$, non transversaux (mais qui ne portent aucun point α_j^k).

§ 9. Applications à déficiences normales. — EXEMPLE 9.1. — Reprenons l'exemple 6.1 d'une application régulière parabolique définie par une fonction méromorphe dans le plan complexe, la variété V_t étant le disque $|z| \leq t$ ($t \in \Theta$). Supposons que la fonction multiforme, inverse de la fonction méromorphe, ait, sur $W = S^2$ un nombre fini de points critiques α_i . L'application f sera alors régulière, pseudo-simpliciale et parabolique. Une telle application possède des propriétés que nous démontrerons (théorème IV) et qui se situent dans le cadre de la théorie de Nevanlinna (sous sa forme différenciée) ⁽²²⁾.

En généralisant les énoncés de ces propriétés nous obtiendrons l'énoncé de nouvelles propriétés [propriété (DN)]; nous examinerons ensuite à quelles conditions elles sont vérifiées.

⁽²²⁾ Nevanlinna a consacré à ces applications le paragraphe 2 du chapitre XI de son livre [1].

DÉFINITIONS 9.1. — *Propriétés (DN)*. — L'énoncé de ces propriétés n'a de sens que pour des applications régulières, pseudo-simpliciales, paraboliques pour une famille de variétés d'approche V_t .

Propriété (DN)₁. — Tout arbre topologique de f est de caractère parabolique.

Propriété (DN)₂ :

$$(9.1) \quad \xi \in W - (\Delta)^{n-2} \quad \text{entraîne} \quad \delta_0(t, \xi) = o(1),$$

donc (8.8) devient

$$(9.2) \quad \text{Trs}_0(t) + \text{Alg}_0(t) + \mathcal{C}_0(t) = \chi(W) + o(1).$$

Propriété (DN)₃. — La somme de la déficience transcendante globale $\text{Trs}_0(t)$ et de la déficience algébrique globale $\text{Alg}_0(t)$ est, à $o(1)$ près, indépendante de l'ensemble $\mathfrak{A}$ des points $\mathfrak{a}_i^k$, donc de θ .

Propriété (DN)₄. — La déficience transcendante globale et la déficience algébrique globale sont, chacune, indépendante de $\mathfrak{A}$, donc de θ .

Propriété (DN)₅ (23). — n est pair et

$$(9.3) \quad \mathcal{C}(t) = \frac{1}{N(t)} \chi(Vt) + o(1).$$

Propriété (DN)₆ (24). — n est pair et

$$(9.4) \quad \text{Alg}(t) = \frac{1}{N(t)} [\chi_f(Vt) - \chi(Vt)] + o(1),$$

$$(9.5) \quad \text{Trs}(t) = \frac{1}{N(t)} \int_{\mathfrak{B}^+(\mathfrak{V}_t)} -\Pi^* + o(1).$$

DÉFINITION 9.2. — Une application régulière pseudo-simpliciale et parabolique est dite à *déficiences normales*, si elle possède les six propriétés (DN).

DÉFINITIONS 9.3. — *Propriété (DN)₃'*. — Sur chaque Δ_i^k , $N(t, \mathfrak{a}_i^k)$ est, à $o(N(t))$ près, indépendant du point $\mathfrak{a}_i^k \in \Delta_i^k$.

Propriété (DN)₄'. — Sur chaque Δ_i^k , $N(t, \mathfrak{a}_i^k)$ est, à $o(N(t))$ près, indépendant du point $\mathfrak{a}_i^k \in \Delta_i^k$.

Propriété (DN)₅' :

$$(9.6) \quad \sum_{j,k \leq n} (-1)^k \theta(t, \mathfrak{a}_j^k) = \chi(Vt) + o(N(t)).$$

(23) Dans le cas des applications finies (§ 15) nous donnons les formules correspondantes pour n impair (les seconds membres sont multipliés par $(-1)^n$ mais la parité de n intervient aussi fondamentalement dans la démonstration du théorème III par l'intermédiaire de la formule (19.7) de [A] et du lemme 12.1).

Propriété (DN)'₆

$$(9.7) \quad \sum_{i, k \leq n} (-1)^k \theta(t, a_i^k) m(D_i^k) = \chi_f(V_t) + o(N(t)).$$

PROPRIÉTÉ 9.1. — *a.* (DN)₂ étant supposée vérifiée, les propriétés (DN)₃ et (DN)'₃ sont équivalentes.

b. (DN)₂ et (DN)₃ étant vérifiées, les propriétés (DN)₄ et (DN)'₄ sont équivalentes.

c. (DN)₂ et (DN)₃ étant vérifiées, les propriétés (DN)₅ et (DN)'₅ sont équivalentes.

d. (DN)₂ et (DN)₃ étant vérifiées, les propriétés (DN)₆ et (DN)'₆ sont équivalentes.

Ces équivalences sont des conséquences directes des définitions. Soit, en effet, Δ_i^k un simplexe particulier de (Δ) , appelons $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ deux ensembles dont les points sur Δ_i^k sont des points a_i^k et $a_i'^k$ donnés à l'avance et dont tous les autres points coïncident. Démontrons alors les différentes parties :

a. Il résulte de (DN)₂ [formule (9.2)] que (DN)₃ est équivalente à la propriété suivante : $\mathcal{C}_0(t)$ est, à $o(1)$ près, indépendant de l'ensemble $\mathfrak{A}$. La définition même de $\mathcal{C}_0(t)$ (8.11) montre que cette propriété résulte de (DN)'₃ : pour voir qu'elle entraîne à son tour (DN)'₃ il suffit d'appliquer la formule (8.11) successivement aux ensembles $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}$ que nous venons de définir : comme la différence des premiers membres est $o(1)$, il en est de même de la différence des seconds membres qui se réduit à $[\bar{N}(t, a_i'^k) - \bar{N}(t, a_i^k)]/N(t)$. La première équivalence est établie.

b. Compte tenu de (DN)₃ la propriété (DN)₄ devient équivalente à la suivante : $\text{Alg}_0(t) + \mathcal{C}_0(t)$ est, à $o(1)$ près, indépendant de $\mathfrak{A}$. Des formules (8.10), (8.11) et (8.6) on déduit :

$$(9.8) \quad \text{Alg}_0(t) + \mathcal{C}_0(t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{i, k \leq n} (-1)^k N_0(t, \Delta_i^k) = \frac{1}{N(t)} \sum_{i, k \leq n} (-1)^k N(t, a_i^k).$$

Cette formule montre que la proposition que nous venons d'énoncer résulte de (DN)'₄ ; pour voir qu'elle entraîne à son tour (DN)'₄, il suffit d'appliquer la formule (9.8) successivement aux ensembles $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}$: comme la différence des premiers membres est $o(1)$, il en est de même de la différence des derniers membres qui se réduit à $[N(t, a_i'^k) - N(t, a_i^k)]/N(t)$. D'où le résultat.

c. Les formules (9.3) et (9.6) sont les mêmes en vertu des relations (8.15) et (8.12).

d. (DN)₅ étant vérifié, (DN)₆ est équivalente à la propriété suivante :

$$(9.9) \quad N(t)[\text{Alg}(t) + \mathcal{C}(t)] = \chi_f(V_t) + o[N(t)].$$

Or, d'après (9.8) et (8.3) le premier membre de cette égalité est égal à celui de l'égalité (9.7); on est donc ramené à $(DN)'_6$.

REMARQUE 9.1. — Si $(DN)_2$, $(DN)_3$, $(DN)_4$ sont vérifiées, $(DN)'_3$ et $(DN)'_4$ le sont; en vertu des définitions 4.1 cela entraîne que :

Sur tout simplexe ouvert $\partial_0(t, \alpha_i^k)$ et $\mathfrak{S}_0(t, \alpha_i^k)$ sont, à $o(1)$ près, indépendants du point α_i^k du simplexe.

§ 10. Conditions (N) ; énoncé du théorème IV. — Nous démontrerons que les applications méromorphes de l'exemple 9.1 sont à déficiences normales. Mais ce n'est pas vrai de toutes les applications régulières, pseudo-simpliciales et paraboliques pour lesquelles n est paire, comme on le concevra d'après les remarques suivantes :

REMARQUE 10.1. — Prenons la même application méromorphe qu'à l'exemple 9.1 mais remplaçons les disques V_i par les surfaces V'_i ainsi obtenues : soit un point régulier de $W=S$, $\alpha_i^2 \in \Delta_i^2$ et $\omega(\alpha_i^2)$ un voisinage compact de α_i^2 dans Δ_i^2 . V'_i s'obtiendra en ôtant de V_i des voisinages de tous les points $\alpha_{ij}^2 \in f^{-1}(\alpha_i^2) \cap V_i$; ces voisinages étant des disques ouverts assez petits : 1° pour avoir leur image dans $\omega(\alpha_i^2)$; 2° pour avoir leur adhérence dans $\tilde{V}_i$ (on suppose toujours $\alpha_{ij}^2 \neq \tilde{V}_i$); 3° pour que les disques centrés en un même point α_{ij}^2 tendent vers ce point quand $t \rightarrow +\infty$; 4° pour que la somme des surfaces $\mathfrak{V}^*$ de tous les disques situés dans un même V_i et la somme des longueurs $\mathfrak{V}^*$ de leurs bords soient $o(\mathfrak{V}^*(V_i)) = o(N(t))$.

L'application est aussi parabolique pour les variétés d'approche V'_i . Affectons les quantités correspondantes du symbole « prime ». On a $N'(t) = N(t) + o(N(t))$ mais $N'(t, \alpha_i^2) = o$. Donc la condition $(DN)_2$ n'est pas vérifiée et $(DN)_1$ non plus puisque l'arbre qui a parmi ses sommets les α_{ij}^2 n'a pas le caractère parabolique pour V'_i .

REMARQUE 10.2. — Supposons maintenant $n > 2$, dans ce cas un tube suffisamment mince autour d'un chemin donné peut avoir une hypersurface arbitrairement petite; en conséquence, contrairement à ce qui se passe pour $n = 2$, la relation (1.1) des applications paraboliques n'est plus suffisante pour limiter la taille et le nombre de ces tubes ou pointes. Or, une telle limitation est nécessaire si l'on veut que les propriétés (DN) soient vérifiées. Supposons, en effet, que f soit une application à déficiences normales; soit $\alpha_i^n \in \Delta_i^n$; on pourra prolonger $V = V_i$ en des pointes englobant chacun des points de $f^{-1}(\alpha_i^n) \cap V_i$, sans changer $\chi(V_i)$, contrairement au cas de la remarque 10.1. Si le bord de ces pointes remplit les conditions nécessaires de régularité et si elles sont assez effilées pour que les sommes de leurs hypervolumes $\mathfrak{V}^*$ et des hypersurfaces $\mathfrak{V}^*$ de leurs bords soient $o(N(t))$, alors l'application sera aussi régulière pour la famille des variétés V'_i obtenues en ôtant ces pointes des V_i . On aura cependant $\partial(t, \alpha_i^n) = 1$, la condition $(DN)_2$ ne sera plus vérifiée et $(DN)_4$ non plus.

Dans les exemples des remarques 10.1 et 10.2 on aurait pu prendre des points différents de Δ_i^n pour les différentes valeurs de i , pour chacun d'eux la limite supérieure de la déficience transcendante aurait été -1 ; en supposant, par exemple, que ces points soient partout denses dans Δ_i^n on aurait obtenu une application qui ne vérifie pas (9.1) quelle que soit la subdivision de (Δ) par laquelle on remplace (Δ) .

Nous allons déterminer une condition $(N)_1$ qui exclura de tels cas tout en permettant l'existence de tubes autour de sous-complexes de (Δ) ⁽²⁵⁾.

DÉFINITION 10.1.—Considérons l'étoile ouverte $\text{Et}(\Delta_i^k)$ (Remarque 7.1) et une composante connexe $\tilde{E}_j$ de $\tilde{f}^{-1}(\text{Et}(\Delta_i^k))$. Si $V - V_i$ admet une composante connexe qui forme un tube autour d'un sous-complexe de dimension $n-2$ au plus, de $(\tilde{D}) \cap \tilde{E}_j$, nous appellerons son bord v_j ; v_j sera le complément de v_j dans $\tilde{V}_i \cap E_j$. [Le sous-complexe considéré contient le simplexe $\tilde{E}_j \cap \tilde{f}^{-1}(\Delta_i^k)$.]

DÉFINITION 10.2. — *Les conditions (N) .* — Ces conditions sont toujours relatives aux applications régulières, pseudo-simpliciales et paraboliques pour des variétés d'approche V_i .

Condition $(N)_1$. — *a.* La partie v_j de $\tilde{V}_i \cap E_j$ n'a pas de composante connexe strictement intérieure à E_j , donc

$$(10.1) \quad \bar{V}_j \cap \tilde{E}_j \neq \emptyset \quad \text{si} \quad v_j \neq \emptyset.$$

b. pour tout compact fixe ω_i^k de $\text{Et}(\Delta_i^k)$, il existe une constante $K(\omega_i^k)$ telle que

$$(10.2) \quad v_j \cap \tilde{f}^{-1}(\omega_i^k) \neq \emptyset \quad \text{entraîne} \quad \mathfrak{U}^*(v_j) \geq K(\omega_i^k).$$

Condition $(N)_2$. — Si $D_i^k \cap \tilde{V}_i \neq \emptyset$; $D_i^k \cap \tilde{V}_i$, $D_i^k \cap \tilde{V}_i^\circ$ et $D_i^k \cap (V - V_i)$ sont des boules topologiques ouvertes (de dimensions respectives $k-1$, k et k).

⁽²⁴⁾ De tels tubes s'introduiront, par exemple, dans le cas suivant : on part d'une application F de C^p dans $W = PC^p$ (espace projectif à p dimensions complexes) définie par p fonctions méromorphes de p variables complexes f_i ($1 \leq i \leq p$); on appelle γ_i le sous-ensemble analytique de C^p , intersection des ensembles des zéros et des ensembles des pôles de f_i . On suppose les γ_i en « position générique », un nombre v d'entre eux auront une intersection de dimension réelle $2p-4v$. Les positions limites des images des points voisins de $\bigcup \gamma_i$ remplissent un

ensemble de dimension réelle $2p-2$. Pour avoir une application partout définie il faudra prendre la restriction f de F à la variété $V = C^p - \bigcup \gamma_i$. $\tilde{V}_i$ contiendra les bords de tubes autour de sous-ensembles analytiques de dimension $2p-4$ et leurs images pourront être des tubes autour de sous ensembles à $2p-2$ dimensions dont l'hypersurface devra être $\mathfrak{o}(\mathfrak{U}(t))$ pour que l'application soit parabolique.

Parmi les cas où les p fonctions f_i sont des fonctions automorphes de p variables complexes par rapport au même groupe fondamental, on trouvera des exemples satisfaisant aux diverses conditions étudiées ici.

Condition (N)₃. — Il existe une constante m_0 indépendante de t , telle que

$$(10.3) \quad D_t^k \cap \dot{V}_t \neq \emptyset \quad \text{entraîne} \quad m(D_t^k) \leq m_0.$$

REMARQUE 10.3. — La condition $(N)_3$ est toujours vérifiée pour la dimension $n = 2$ (on suppose, en effet, toujours que $a_i^0 \neq \dot{V}_t$).

REMARQUE 10.4. — Nous n'avons pas cherché à prendre les conditions les moins restrictives surtout en ce qui concerne les conditions $(N)_2$ et $(N)_3$. Au paragraphe 14 nous traiterons un exemple où $(N)_2$ est remplacé par une autre condition.

THÉORÈME III (^{24bis}). — Soit f une application régulière, pseudo-simpliciale et parabolique pour une famille de variétés d'approche V_t ; pour cette application :

- a. la condition $(N)_1$ entraîne les propriétés $(DN)_1$, $(DN)_2$ et $(DN)_3$ (déf. 9.1);
- b. l'ensemble des conditions $(N)_1$ et $(N)_3$ entraîne les propriétés $(DN)_1$, $(DN)_2$, $(DN)_3$ et $(DN)_4$;
- c. si la dimension n de V et W est paire, l'ensemble des conditions $(N)_4$ et $(N)_2$ entraîne les propriétés $(DN)_1$, $(DN)_2$, $(DN)_3$ et $(DN)_5$;
- d. si n est paire, l'ensemble des conditions $(N)_4$, $(N)_2$ et $(N)_3$ entraîne les six conditions (DN) , l'application f est alors à déficiences normales.

§ 11. Démonstrations du théorème III, a et b. — **PROPRIÉTÉ 11.1.** — La condition $(N)_1$ entraîne que tous les $\varphi_j \cap f^{-1}(\omega_i^k)$ sont concentrés dans $o(N(t))$ composantes E_j de $f^{-1}(\text{Et}(\Delta_i^k))$.

Cela résulte de la relation (10.2) et de la relation fondamentale (1.1) des applications paraboliques.

Par ailleurs les tubes de bord φ'_i n'existent pas pour $k = n$ et $k = n - 1$. Dans ce cas la restriction de f à chaque E_j est un homéomorphisme. La propriété 11.1 donne donc :

PROPRIÉTÉ 11.2. — Si ω_i^{n-1} (resp. ω_i^n) est un ensemble compact connexe de $\text{Et}(\Delta_i^{n-1})$ (resp. Δ_i^n), le nombre des composantes connexes de $f^{-1}(\omega_i^{n-1})$ [resp. $f^{-1}(\omega_i^n)$] qui coupent $\dot{V}_t$ est $o(N(t))$; nous écrirons ce nombre

$$(11.1) \quad \eta(t, \omega_i^{n-1})N(t), \quad \text{avec} \quad \eta(t, \omega_i^{n-1}) = o(1).$$

Soient maintenant ξ et ξ' deux points de ω_i^{n-1} et (ξ, ξ') un chemin de ω_i^{n-1} qui

(^{24bis}) Comme les propriétés (DN) s'introduisent de manière naturelle, ce théorème qui les relie à des conditions de régularité et de parité n'est pas sans intérêt. Mais ces conditions, surtout $(N)_2$, peuvent être difficiles à vérifier; il serait donc très intéressant de les remplacer par des conditions mieux reliées à des classes d'applications déjà connues.

Remarquons que la condition $(N)_2$ et les parties c et d du théorème III dont les démonstrations sont fastidieuses n'interviennent pas dans la démonstration du théorème IV.

les joint, chaque composante connexe de $f^{-1}(\omega_i^{n-1})$ contient un point $x \in f^{-1}(\xi)$ et un seul, un point $x' \in f^{-1}(\xi')$ et un seul et un chemin (x', x) et un seul d'image (ξ', ξ) . Si ce chemin coupe $\tilde{V}_t$, la composante connexe de $f^{-1}(\omega_i^{n-1})$ le coupe aussi. Il résulte alors de la propriété 11.2 que :

PROPRIÉTÉ 11.3. — Soit (ξ, ξ') un chemin situé dans un ensemble compact et connexe $\omega_i^{n-1} \subset \text{Et}(\Delta_i^{n-1})$; $f^{-1}(\omega_i^{n-1})$ est formé de chemins (x_j, x'_j) disjoints parmi lesquels ceux qui coupent $\tilde{V}_t$ sont en nombre $\leq \eta(t, \omega_i^{n-1})N(t)$.

On a donc, *a fortiori* :

$$(11.2) \quad |N(t, \xi) - N(t, \xi')| \leq \eta(t, \omega_i^{n-1})N(t).$$

Première conséquence. — La propriété $(DN)_1$ est vérifiée. Soit, en effet, Λ le complexe de W qui définit un arbre topologique $f^{-1}(\Lambda)$ et un rameau de (Λ) . $(\alpha_k^n, \alpha_i^{n-1}, \alpha_\mu^n) \subset \text{Et}(\Delta_i^{n-1})$ (le compact ω_i^{n-1} peut être le rameau lui-même). La propriété 11.3 montre que les rameaux de $f^{-1}(\Lambda)$, images réciproque de $(\alpha_k^n, \alpha_i^{n-1}, \alpha_\mu^n)$ et qui coupent $\tilde{V}_t$, sont en nombre $O[\eta(t, \omega_i^{n-1})N(t)]$. Il en est de même de tous les rameaux de $f^{-1}(\Lambda)$ qui coupent $\tilde{V}_t$ puisque les rameaux-images sont en nombre fini. L'arbre $f^{-1}(\Lambda)$ a bien le caractère parabolique.

Deuxième conséquence. — La propriété $(DN)_2$ est vérifiée; soit, en effet ξ un point donné de $W - (\Delta)^{n-2}$; ξ est au moins dans une étoile $\text{Et}(\Delta_i^{n-1})$. Nous prendrons alors pour ω_i^{n-1} un voisinage connexe fermé de ξ dans $\text{Et}(\Delta_i^{n-1})$. D'après le théorème II, $\alpha^{(25)}$, l'ensemble $\omega_i^{n-1} - (\omega_i^{n-1} \cap e_i)$ n'est pas vide, soit ξ_t un de ses points, on a

$$(11.3) \quad |N(t, \xi_t) - N(t)| \leq \eta(t)N(t).$$

Cette formule et la formule (11.2) appliquée pour $\xi' = \xi_t$, donnent

$$(11.4) \quad |N(t, \xi) - N(t)| \leq [\eta(t) + \eta(t, \omega_i^{n-1})]N(t), \quad \text{donc} \quad \delta(t, \xi) = o(1).$$

La condition $(N)_1$ entraîne donc bien $(DN)_2$.

Pour montrer qu'elle entraîne $(DN)_3$ nous utiliserons la propriété 11.1. Soient en effet ξ et ξ' deux points donnés de Δ_i^k et ω_i^k un ensemble compact connexe de Δ_i^k qui les contient. Pour comparer $N(t, \xi)$ et $N(t, \xi')$ nous grouperons les deux points $\tilde{x}_j \in \tilde{f}^{-1}(\xi)$ et $\tilde{x}'_j \in \tilde{f}^{-1}(\xi')$ qui sont dans une même composante connexe de $\tilde{f}^{-1}(\text{Et}(\Delta_i^{n-1}))$. Si $\tilde{V}_t \cap \tilde{E}_j$ contient une partie v'_j c'est que $V - V_t$ forme un tube autour d'un sous-complexe de $(D) \cap \tilde{E}_j$ lequel contient nécessairement D_{ij}^k , c'est donc que x_j et x'_j sont tous deux dans $V - V_t$. Pour que l'un des deux points soit dans V_t et l'autre dans $V - V_t$ il est donc nécessaire que $\tilde{V}_t \cap \tilde{E}_j$ se réduise à sa partie v_j et de plus que $v_j \cap f^{-1}(\omega_i^k) \neq \emptyset$. La propriété 11.1 montre que cela ne peut avoir lieu que pour $o(N(t))$ composantes E_j , chacune d'elle correspond

⁽²⁵⁾ On pourrait éviter d'utiliser ici le théorème I, α et le démontrer dans le cas considéré en introduisant ici le complexe U_i (définition 12.1) et en vérifiant que $\mathbf{V}^*(U_i) = o(\mathbf{V}^*(V_i))$.

à une unité au plus dans la différence $\bar{N}(t, \xi') - N(t, \xi)$. D'où, en prenant pour ξ et ξ' les points $\mathfrak{a}_i^{k'}$ et $\mathfrak{a}_i^k$

$$(11.5) \quad \bar{N}(t, \mathfrak{a}_i^{k'}) = \bar{N}(t, \mathfrak{a}_i^k) + o(N(t)).$$

En appliquant cette formule à tous les $\mathfrak{a}_i^{k'}$ d'un ensemble $\mathfrak{A}'$ donné on voit que la propriété $(DN)_3$ est vérifiée ce qui achève de démontrer le théorème III, *a*.

Le théorème IV, *b* se déduit du dernier raisonnement fait : en effet si la condition $(N)_3$ est réalisée, on a

$$(11.6) \quad |N(t, \mathfrak{a}_i^{k'}) - N(t, \mathfrak{a}_i^k)| \leq m_0 |\bar{N}(t, \mathfrak{a}_i^{k'}) - \bar{N}(t, \mathfrak{a}_i^k)| = o(N(t)),$$

formule qui, appliquée à tous les $\mathfrak{a}_i^{k'}$ de $\mathfrak{A}'$, montre que $\text{Alg}_0(t) + \mathcal{C}_0(t)$, [formule (9.8)] est, à $o(1)$ près indépendant de $\mathfrak{A}$; comme $\mathcal{C}_0(t)$ l'est aussi d'après $(DN)_3$, il en est de même de $\text{Alg}_0(t)$; il en est alors aussi de même de $\text{Trs}_0(t)$ d'après la relation (9.2) de $(DN)_2$. $(DN)_4$ est donc vérifiée.

§ 12. **Démonstration du théorème III, c.** — LEMME 12.1. — *Étant donné une variété compacte sans bords de dimension impaire n' munie d'une triangulation cellulaire finie; si $\mathbb{U}$ est un sous-complexe formé de cellules fermés de dimension n' , si $\dot{\mathbb{U}}$ est la frontière de $\mathbb{U}$ dans la variété et α' le nombre total des cellules de toutes dimensions de $\dot{\mathbb{U}}$, on a*

$$(12.1) \quad \chi(\mathbb{U}) \leq \alpha'.$$

Appelons, en effet α^p le nombre des simplexes de dimension p de $\dot{\mathbb{U}}$, on a donc $\alpha' = \sum_p \alpha^p$ ($0 \leq p \leq n$). Soit $\beta^p(\dot{\mathbb{U}})$ le nombre de Betti de $\dot{\mathbb{U}}$ pour la dimension p ; on sait que $\beta^p(\dot{\mathbb{U}}) \leq \alpha^p$.

Soit T un tube autour de $\dot{\mathbb{U}}$ (homéomorphe à un tube construit par la méthode du paragraphe 6 de [A] relative aux complexes euclidiens). $\dot{\mathbb{U}}$ est alors un rétract de T et a les mêmes nombres de Betti.

Soit $\dot{T}$ le bord de T dans la variété; considérons l'application bi-univoque de l'espace des chaînes de $\dot{T}$ dans l'espace des chaînes de T , puis l'application de ce dernier espace sur l'espace des chaînes de T modulo $\dot{T}$. On a la suite exacte d'homologie suivante (les H étant, selon l'usage les groupes d'homologie)

$$H^{p+1}(T, \text{mod } \dot{T}) \xrightarrow{\theta} H^p(\dot{T}) \xrightarrow{\psi} H^p(T).$$

Ces deux applications étant désignées par θ et ψ , on a

$$\beta^p(\dot{T}) = \dim H^p(\dot{T}) = \dim(\text{image de } \psi) + \dim(\text{noyau de } \psi),$$

or

$$\dim(\text{image de } \psi) \leq \dim H^p(T) = \beta^p(T)$$

et, du fait que la suite est exacte en $H^p(\dot{T})$:

$$\dim(\text{noyau de } \psi) = \dim(\text{image de } \theta) \leq \dim(H^{p+1}(T, \text{mod } \dot{T})) = \beta^{p+1}(T, \text{mod } \dot{T}),$$

d'où

$$(12.2) \quad \beta^p(\dot{T}) \leq \beta^p(T) + \beta^{p+1}(T, \text{mod } \dot{T}).$$

Le théorème de dualité de Lefschetz nous donne alors :

$$\beta^{p+1}(T, \text{mod } \dot{T}) = \beta^{n-p-1}(T) \quad [\text{pour } p = n \text{ posons } \beta^{-1}(T) = \alpha^{-1} = 0]$$

donc

$$(12.3) \quad \beta^p(\dot{T}) \leq \beta^p(T) + \beta^{n-p-1}(T) = \beta^p(\dot{U}) + \beta^{n-p-1}(\dot{U}) \leq \alpha^p + \alpha^{n-p-1}.$$

Appelons alors $\dot{T}^+$ la partie de $\dot{T}$ extérieure à U ; comme $\dot{T}^+$ est formé d'une ou plusieurs parties connexes de $\dot{T}$, il vient

$$(12.4) \quad \beta^p(\dot{T}^+) \leq \beta^p(\dot{T}) \leq \alpha^p + \alpha^{n-p-1},$$

donc

$$(12.5) \quad |\chi(\dot{T}^+)| = \left| \sum_{0 \leq p \leq n} (-1)^p \beta^p(\dot{T}^+) \right| \leq 2 \sum_{-1 \leq p \leq n} \alpha^p = 2 \sum_{0 \leq p \leq n} \alpha^p = 2\alpha'.$$

Or, $\dot{T}^+$ est le bord de la variété fermée $U \cup T$ dont la dimension n' est impaire; il vient donc

$$(12.6) \quad \chi(U \cup T) = \frac{1}{2} [\chi(\dot{T}^+)].$$

Mais le complexe U est un rétract de $U \cup T$, donc

$$\chi(U) = \chi(U \cup T) \text{ et } \chi(U) \leq \alpha'.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant la condition $(N)_1$ et $(N)_2$ vérifiées et n pair.

DÉFINITION 12.1. — *Ensemble U_t .* — Appelons D_t^k tout simplexe D_t^k possédant la propriété suivante : D_t^k coupe $\dot{V}_t$ mais tous les D_t^n auxquels il est adhérent ont leur point α_t^n extérieur à V_t . Nous poserons alors :

$$(12.7) \quad U_t = \bigcup_i D_t^k \cap V_t \quad \text{et} \quad \bar{U}_t = \bigcup_i D_t^k \cap \dot{V}_t.$$

$V_t - U_t$ est un complexe : en effet c'est la réunion des traces $\dot{D}_t^n \cap V_t$ pour tous les D_t^n dont le point α_t^n est dans V_t . $V_t - U_t$ est donc un sous-complexe de $(D)_t'$, $(D)_t'$ étant une sous-triangulation de (D) , variable avec t , et admettant $\dot{V}_t$ pour sous-complexe.

U_t est un complexe : c'est, en effet, la réunion des traces $D_t^n \cap V_t$ pour tous les D_t^n dont le point α_t^n est extérieur à V_t .

$U_t \cap (V_t - U_t)$ est un sous-complexe de $(D)_t'$ dont la dimension est partout égale au nombre impair $n - 1$.

PROPRIÉTÉ 12.1. — Le nombre total des cellules $D_t^k \cap V_t$ du complexe $\bar{U}_t \cap (V_t - U_t)$ est

$$\alpha' = o(N(t)).$$

Considérons, en effet, un simplexe D_i^{n-1} tel que $D_i^{n-1} \cap V_i$ soit dans $\bar{U}_i \cap (V_i - U_i)$; il est caractérisé par le fait que, des deux simplexes D_i^n auxquels il est adhérent, l'un a son point a_i^n dans V_i et l'autre dans $V - V_i$; le rameau de l'arbre topologique qui joint ces deux points coupe donc $\dot{V}_i$. Du caractère parabolique de l'arbre (démontré précédemment) on déduit que ces rameaux sont en nombre $o(N(t))$; il en est donc de même des cellules $D_i^{n-1} \cap V_i$ de $U_i \cap (V_i - U_i)$. Toutes ses cellules de dimensions inférieures, $D_i^k \cap V_i$ sont telles que D_i^k est adhérente à l'un des simplexes D_i^{n-1} que nous venons de considérer; comme le nombre des simplexes de toutes dimensions adhérents à un simplexe de dimension $n-1$ est borné dans la triangulation (Δ) , donc aussi dans (D) , les simplexes D_i^k considérés et les cellules correspondantes de $\bar{U}_i \cap (V_i - U_i)$ sont, pour l'ensemble des dimensions comme pour la dimension $n-1$, en nombre $o(N(t))$,

C. Q. F. D.

DÉFINITION 12.2. $\tilde{U}_i$. — Considérons maintenant les traces, sur $\dot{V}_i$, des sous-complexes $V_i - U_i$, $\bar{U}_i$ et $\bar{U}_i \cap (V_i - U_i)$; ce sont encore des sous-complexes de la triangulation $(D)_i'$. Appelons $\tilde{U}_i$ la trace, sur $\dot{V}_i$, de $\bar{U}_i \cap (V_i - U_i)$. $\tilde{U}_i$ admet une triangulation cellulaire dont chaque cellule est une trace $D_i^k \cap \dot{V}_i$ [ceci d'après la condition $(N)_2$] ou encore la trace de la cellule correspondante de $\bar{U}_i \cap (V_i - U_i)$. De la propriété 12.1 on déduit donc que la triangulation de $\tilde{U}_i$ comporte un nombre de cellules $\alpha' \leq o(N(t))$.

Mais $\tilde{U}_i$ est la frontière du complexe $\bar{U}_i \cap \dot{V}_i$ dans la variété de dimension impaire, compacte et sans bord $\dot{V}_i$. Le lemme 12.1 est donc applicable et montre que $\chi(\bar{U}_i \cap \dot{V}_i) \leq \alpha' = o(N(t))$. Le même raisonnement est valable pour $V_i - U_i$ qui a même frontière dans $\dot{V}_i$. Par ailleurs on a $U_i \cap V_i = (\bar{U}_i \cap V_i) - \tilde{U}_i$. On a donc finalement en définissant $\chi(U_i)$ et $\chi(U_i \cap \dot{V}_k)$ comme $\sum (-1)^k$ étendu à toutes les cellules ouvertes :

$$(12.8) \quad \chi(U_i \cap \dot{V}_i) = o(N(t)); \quad \chi((V_i - U_i) \cap \dot{V}_i) = o(N(t));$$

$$(12.9) \quad \chi(U_i \cap \dot{V}_i) = o(N(t)).$$

Comme, en vertu de $(N)_2$, les cellules de dimension $k-1$ de $U_i \cap \dot{V}_i$ et les cellules de dimension k de $\tilde{U}_i$ se correspondent biunivoquement, (12.9) donne

$$(12.10) \quad \chi(\tilde{U}_i) = o(N(t)),$$

donc, n étant pair

$$(12.11) \quad \chi(\dot{V}_i - \tilde{U}_i) = \chi(\dot{V}_i) - \chi(\tilde{U}_i) = \chi(V_i) - o(N(t)).$$

Par ailleurs :

PROPRIÉTÉ 12.2. — On a

$$(12.12) \quad \sum_{i, k \leq n} (-1)^k \theta(t, a_i^k) - \chi(\dot{V}_i - \tilde{U}_i) = o(N(t)).$$

Toutes les cellules de $\dot{V}_i - \dot{U}_i$ sont de la forme $D_j^k \cap \dot{V}_i$. La différence des deux termes du premier membre de (12. 12) provient de deux catégories de D_j^k : d'une part ceux pour lesquels $D_j^k \cap V_i$ est dans U_i mais contient un point a^k de $f^{-1}(\mathfrak{A})$, d'autre part ceux pour lesquels $D_j^k \cap V_i$ est dans $V_i - U_i$ mais ne contient pas de point a_j^k de $f^{-1}(\mathfrak{A})$. Considérons, parmi ces simplexes D_j^k , ceux dont l'image est un simplexe Δ_i^k donné. Appliquons alors la propriété 11. 1 en prenant un ensemble compact connexe ω_i^k de $\text{Et}(\Delta_i^k)$ qui contienne les points a_i'' de tous les Δ_i'' auxquels Δ_i^k est adhérent. Chaque composante connexe E_j de $f^{-1}(\text{Et}(\Delta_i^k))$ contient au plus un simplexe $D_{ij}^k \subset f^{-1}(\Delta_i^k)$; si ce D_{ij}^k est de l'une des deux catégories étudiées cela entraîne :

1° que $\dot{V}_i \cap E_j$ ne contient pas de partie ν_j' (nous avons en effet déjà vu que $\nu_j' \neq \emptyset$ impliquerait que D_{ij}^k soit entièrement dans $V - V_i$, donc que $D_{ij}^k \cap V_i$ soit vide);

2° que $\dot{V}_i \cap E_j \cap f^{-1}(\omega_i^k) = \nu_j \cap E_j \cap f^{-1}(\omega_i^k)$ est non vide.

D'après la propriété 11. 1 ce dernier point implique que les E_j correspondants donc aussi les D_{ij}^k sont en nombre $o(N(t))$. Comme les simplexes Δ_j^k sont en nombre fini nous avons ainsi borné par $o(N(t))$ le nombre des simplexes D_j^k des deux catégories considérées. Comme chacun intervient dans la différence pour $\div 1$ ou $\div 1$, c'est que celle-ci est $o(N(t))$. C. Q. F. D.

Les formules (12. 11) et (12. 12) donnent, compte tenu de (8. 15) :

$$(12. 13) \quad N(t) \mathcal{C}_0(t) = \sum_{j, k \leq n} (-1)^k \theta(t, a_j^k) = \chi_f(V_i) + o(N(t)).$$

Donc $(DN)_5$ résulte de $(N)_1$ et $(N)_2$; le théorème III, c est démontré.

§ 13. **Démonstration du théorème III, d.** — Nous supposons maintenant vérifiées les conditions $(N)_1$, $(N)_2$ et $(N)_3$, et n pair. Pour démontrer que $(DN)_6$ est vérifiée nous suivrons une méthode analogue à celle du paragraphe 12. Du fait que le complexe $\ddot{U}_i$, trace, sur $\dot{V}_i$, de $\overline{U}_i \cap (V_i - U_i)$ a un nombre de cellules $\alpha' = o(N(t))$, nous aurons à déduire que $\chi_f(\ddot{U}_i)$ est $o(N(t))$. Mais le lemme 12. 1 n'est pas valable si l'on remplace χ par χ_f . Comme dans la démonstration de ce lemme nous allons, grâce à un tube T autour de $\dot{U}$, nous ramener au cas d'une variété (transversale) de dimension impaire $U \cup T$ et de son bord pour lesquels la formule (19. 7) du Mémoire $|A|$ est valable; cette formule montre que, si U est une sous-variété transversale de dimension impaire (son bord $\dot{U}$ est alors aussi une variété transversale), on a

$$\chi_f(\dot{U}) = 2\chi_f(U).$$

Considérons donc comme au lemme 12. 1, le tube T autour de $\dot{U} = \ddot{U}_i$, dans la variété de dimension impaire $\dot{V}_i$. T se réduit à $\ddot{U}_i$ par une homotopie où la trajectoire de chaque point x sera dans $T \cap \overline{D}_i^k(x)$. $\dot{T}$ étant le bord de T dans $\dot{V}_i$, posons $\dot{T}^- = \dot{T} \cap U_i \cap V_i$. Nous allons démontrer la formule

$$(13. 1) \quad \chi_f(\dot{T}^-) = o(N(t)).$$

Considérons la partition de $\hat{T}^-$ en parties $\hat{T}^- \cap D_i^k$:

$$\chi_f(\hat{T}^-) = \sum_{i,k \leq n} m(D_i^k) \chi(\hat{T}^- \cap D_i^k)$$

et compte tenu de la condition $(N)_3$:

$$(13.2) \quad |\chi_f(\hat{T}^-)| \leq m_0 \sum_{i,k} |\chi(\hat{T}^- \cap D_i^k)|.$$

1° Le nombre des termes du second membre de (13.2) est $o(N(t))$. En effet, tout simplexe D_i^k qui coupe $\hat{T}^-$ contient, dans son adhérence, au moins un simplexe D_j^l tel que $D_j^l \cap \hat{V}_i \subset \hat{U}_i$; le nombre de ces D_j^l est $\alpha' \leq o(N(t))$ (propriété 12.1). Le nombre des D_i^k auxquels chacun d'eux peut être adhérent est borné par $Km(D_j^l) \leq Km_0$. Le nombre des D_i^k qui coupent $\hat{T}^-$ est donc aussi $o(N(t))$.

2° Montrons que

$$(13.3) \quad \chi(\hat{T}^- \cap D_i^k) \leq 2^{n+1}.$$

Remarquons d'abord que si D_i^k coupe $\hat{T}^- \subset \hat{U}_i$ il ne coupe pas $\hat{T}^- = \hat{T}^- \subset V_i - U_i$ et l'on a $\hat{T}^- \cap D_i^k = \hat{T} \cap D_i^k$. La formule (13.3) sera donc conséquence de la suivante :

$$(13.4) \quad \chi(\hat{T} \cap D_i^k) \leq 2^{n+1},$$

or, l'homotopie qui amène $\hat{T}$ sur $\hat{U}_i$, amène $\hat{T} \cap D_i^k$ sur un sous-ensemble de $\hat{U}_i$ formé de cellules $D_j^l \cap \hat{V}_i$ avec $D_j^l \subset D_i^k$. Pour chaque simplexe D_j^l il y a donc au plus $2^{k+1} \leq 2^{n+1}$ simplexes D_j^l , donc au plus 2^{n+1} cellules $D_j^l \cap \hat{V}_i$. La caractéristique χ du sous-ensemble de $\hat{U}_i$ rétracté de $\hat{T} \cap D_i^k$ est donc inférieure à 2^{n+1} , or elle est égale à $\chi(\hat{T} \cap D_i^k)$ ce qui démontre (13.4), donc aussi (13.3).

Le deuxième terme de (13.2), somme de termes $\leq 2^{n+1}$ en nombre $o(N(t))$ est lui-même $o(N(t))$, ce qui démontre les formules (13.2) et (13.1).

La variété topologique $\hat{T}^-$ est, par construction, transversale par rapport à une sous-triangulation de $V_i \cap (D^i)_i$ et $\hat{V}_i$ est par hypothèse, transversale par rapport à (D) , en composant les droites $\mathcal{E}^1$ relatives à $\hat{V}_i$ plongé dans V et les droites $\mathcal{E}^1$ relatives à $\hat{T}^-$ plongé dans $\hat{V}_i$, on obtient les plans $\mathcal{E}^2$ qui définissent $\hat{T}^-$ comme variété transversale par rapport à (D) . On en déduit que la variété topologique $\hat{V}_i \cap (V_i - U_i) \cup T$ de bord $\hat{T}^-$ est aussi une variété transversale par rapport à (D) , sa dimension $n-1$ étant impaire, la formule (19.7) de [A] montre que

$$(13.5) \quad \chi_f[\hat{V}_i \cap (V_i - U_i) \cup T] = \frac{1}{2} \chi_f(\hat{T}^-) = o(N(t)).$$

Posons $T^- = T \cap (U_i \cap \hat{V}_i)$: le complémentaire, dans $\hat{V}_i$, de $[\hat{V}_i \cap (V_i - U_i) \cup T]$ est $(U \cap \hat{V}_i) - T^-$ et, comme $\chi_f(\hat{V}_i) = 0$ du fait que $n-1$ est impair, il vient

$$(13.6) \quad \chi_f((U_i \cap \hat{V}_i) - T^-) = -\chi_f[\hat{V}_i \cap (V_i - U_i) \cup T] = o(N(t)).$$

Montrons par ailleurs que

$$(13.7) \quad \chi_f(U_t \cap \hat{V}_t) = \chi_f(U_t \cap \hat{V}_t) - T^-.$$

En effet, si la cellule $D_t^k \cap \hat{V}_t$ rencontre T^- , sa partie extérieure à T est encore une cellule ouverte de dimension $k-1$. En prenant les partitions des deux variétés déterminées par les traces des D_t^k , on obtient des termes $(-1)^k m(D_t^k)$ égaux deux à deux dans les deux membres. Les formules (13.6) et (13.7) donnent

$$(13.8) \quad \chi_f(U_t \cap \hat{V}_t) = o(N(t)).$$

Cette formule correspond à la formule (12.9) et nous poursuivrons maintenant par la même méthode qu'au paragraphe 12 : les cellules de dimension $k-1$ de $U_t \cap \hat{V}_t$ et celles de dimension k de $\hat{U}_t$ se correspondent biunivoquement, on a donc

$$(13.9) \quad \chi_f(\hat{U}) = o(N(t)),$$

donc

$$(13.10) \quad \chi_f(\hat{V}_t - \hat{U}_t) = \chi_f(\hat{V}_t) - \chi_f(\hat{U}_t) = \chi_f(V_t) + o(N(t)).$$

Par ailleurs :

PROPRIÉTÉ 13.1. — On a

$$(13.11) \quad \sum_{i, k \leq n} (-1)^k \theta(t, \alpha_i^k) m(D_i^k) - \chi_f(\hat{V}_t - \hat{U}_t) = o(N(t)).$$

La différence des deux termes du premier membre provient, en effet, des mêmes simplexes D_i^k que la différence des deux termes du premier membre de (12.12); en démontrant la propriété 12.2, nous avons vu que leur nombre est $o(N(t))$. Comme chacun d'eux intervient dans la différence, pour un nombre compris entre $-m_0$ et $+m_0$, la différence est aussi $o(N(t))$. C. Q. F. D.

Les formules (13.10) et (13.11) donnent la relation (9.8)

$$\sum_{i, k \leq n} (-1)^k \theta(t, \alpha_i^k) m(D_i^k) = \chi_f(V_t) + o(N(t))$$

qui exprime qu'est vérifiée la propriété $(DN)_6$, laquelle, puisque $(DN)_2$ et $(DN)_3$ sont déjà vérifiées, est équivalente à $(DN)_6$ (propriété 9.1, d). Les conditions (N_1) , (N_2) et (N_3) entraînent bien la propriété $(DN)_6$ en plus des cinq autres lorsque n est pair. La démonstration de théorème III est achevée.

IV. — Cas particuliers.

§ 14. Applications définies par des fonctions méromorphes dans le plan. — Nous résumerons les principales propriétés d'une telle application dans l'énoncé du théorème suivant :

THÉOREME IV. — Soit une fonction méromorphe dans le plan complexe $V = \mathbb{C}$, elle définit une application f de V dans la sphère de Riemann, $W = \mathbb{P}^1$. Il existe sur la demi-droite positive un ensemble Θ dont le complémentaire est une suite d'intervalles assez petits pour que la somme de leurs mesures logarithmiques soit finie, et tel que, V_t étant le disque $|z| \leq t$, $z \in \mathbb{C}$, $t \in \Theta$, on ait les résultats :

a. l'application f est régulière et parabolique relativement aux variétés d'approche V_t [pour tout point de $\dot{V}_t$, $m(z) = 1$].

Il existe un ensemble e de mesure nulle dans W tel que

$$(14.1) \quad \xi \in W - e \quad \text{entraîne} \quad \delta(t, \xi) = o(1) \quad (26)$$

et l'on a

$$(14.2) \quad \frac{1}{N(t)} \int_{\partial \mathcal{K}_+(V_t)} -\Pi^* + \frac{1}{N(t)} \sum_{\substack{m(z) \neq 1 \\ z \in V_t}} (m(z) - 1) = 2 + o(1),$$

l'opposé de l'intégrale écrite est l'intégrale, le long de $\dot{V}_t$ de la courbure géodésique de $\dot{V}_t$ si l'on munit V d'une métrique dont le ds^2 est l'image réciproque, par f , du ds^2 riemannien sur la sphère ⁽²⁷⁾;

b. si la fonction méromorphe est telle que la fonction multiforme inverse ait, sur W , un nombre fini de points critiques α_i , l'application régulière et parabolique f devient, de plus, pseudo-simpliciale et à déficiences normales, en particulier :

Tout arbre topologique est de caractère parabolique, ⁽²⁸⁾

$$(14.3) \quad \xi \neq \alpha_i \quad \text{entraîne} \quad \delta(t, \xi) = o(1);$$

$$(14.4) \quad \sum_i \mathfrak{Z}(t, \alpha_i) = \frac{1}{N(t)} \sum_{\substack{m(z) \neq 1 \\ z \in V_t}} (m(z) - 1) \quad (\text{relation évidente});$$

$$(14.5) \quad \sum_i \delta(t, \alpha_i) = \frac{1}{N(t)} \int_{\partial \mathcal{K}_+(V_t)} -\Pi^* + o(1),$$

donc (14.2) devient

$$(14.6) \quad \sum_i \delta(t, \alpha_i) + \sum_i \mathfrak{Z}(t, \alpha_i) = 2 + o(1).$$

⁽²⁶⁾ Frostmann [1] a démontré un résultat correspondant à celui-ci lorsqu'on remplace $\delta(t, \xi)$ par $\int_{r_0}^r \delta(t, \xi) d \log t$, l'ensemble exceptionnel est alors de capacité nulle.

⁽²⁷⁾ Pour revenir au deuxième théorème de Nevanlinna on pourra appliquer la méthode de Ahlfors [2] ; en effet notre formule est comparable à la formule (B) du paragraphe 2 de ce Mémoire, le terme relatif au potentiel correspondant à notre terme $o(1)$; Ahlfors le majore dans son paragraphe 3 en rétablissant l'inégalité de Nevanlinna ; la majoration la plus délicate, celle du terme $\omega(r)$, reste à faire même si l'on part de notre formule (14.2).

⁽²⁸⁾ Cette proposition ne peut pas s'étendre au cas où les points α_i ne sont plus en nombre fini ; cela résulte, par exemple de l'étude de la première fonction $f(z)$ de notre Note [2], le premier des deux arbres topologiques décrits est non parabolique au sens de la définition (7.7). Voir aussi notre Note [3].

REMARQUE 14.1. — Il résulte d'un calcul classique d'Ahlfors ⁽²⁹⁾ que tous ces résultats sont valables pour l'application du disque $|z| < R$ dans la sphère de Riemann, définie par une fonction méromorphe dans ce disque, à condition que l'on ait

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (R - t) \mathbf{V}(t) = +\infty \quad \text{pour } t \in \Theta, \quad t \rightarrow t_0 = R.$$

REMARQUE 14.2. — Le calcul d'Ahlfors et tous nos résultats se généralisent lorsque la fonction, sans être nécessairement analytique complexe (excentricité égale à 1) est d'excentricité bornée uniformément dans tout son domaine de définition ⁽³⁰⁾.

Nous avons déjà démontré la partie *a* du théorème IV (exemples 6.1 et 9.1). Nous démontrerons la partie *b* en démontrant que l'application, dans le cas considéré, est à déficiences normales.

La condition (N)₁ est vérifiée, en effet :

a. $\dot{V}_t$ n'a qu'une composante connexe qui, d'ailleurs, pour t assez grand, n'est jamais dans une seule composante connexe E_i ;

b. la constante $K_3(w_i^k)$ existe : c'est deux fois la plus courte distance du compact w_i^k au bord de l'étoile qui le contient.

La condition (N)₃ est vérifiée, avec $m_0 = 1$ puisque $\dot{V}_t$ est supposé ne porter aucun point de $f^{-1}(a_i)$.

Du théorème IV, *a* et *b* nous déduisons que les propriétés $(DN)_1$, $(DN)_2$, $(DN)_3$ et $(DN)_4$ sont vérifiées. Remarquons que l'on a évidemment :

$$(14.7) \quad \chi_{\mathcal{F}}(V_t) - \chi(V_t) = \sum_{a_i^0 \in V_t} (m(a_i^0) - 1) = \sum_{i, k \leq 2} (-1)^k \theta(t, a_i^k) m(D_i^k) \\ - \sum_{i, k \geq 2} (-1)^k \theta(t, a_i^k),$$

cela montre que $(DN)_6'$ sera conséquence immédiate de $(DN)_8'$.

Pour achever la démonstration du théorème IV il ne nous reste donc plus qu'à démontrer la formule (9.6) qui, du fait que $\chi(V_t) = 1$ s'écrit :

$$(14.8) \quad \sum_{i, k \leq 2} (-1)^k \theta(t, a_i^k) = o(N(t)).$$

Appelons u_t la réunion de toutes les composantes connexes de tous les $\tilde{D}_i^2 \cap V_t$ qui contiennent un point a_i^2 . Montrons que

$$(14.9) \quad \chi(\dot{u}_t) = o(N(t)).$$

Il suffit de montrer que le nombre des composantes de $\dot{u}_t$ d'une part, de $V - u_t$ d'autre part, est $o(N(t))$ (ce qui ne serait pas suffisant pour $n \geq 2$). Or, $V - u_t$

⁽²⁹⁾ Voir Nevanlinna [1], p. 342.

⁽³⁰⁾ Voir Nevanlinna, [1], p. 344.

n'a qu'une composante connexe : soit, en effet, $z \in (V - u_i) \cap V_i = V_i - u_i$. z est dans une composante connexe d'une $D_i^2 \cap V_i$, laquelle ne contient pas de point a_i^2 ; joignons z au point a_i^2 de D_i^2 par un chemin dont tous les points, sauf peut-être z , sont dans D_i^2 ; comme z et a_i^2 ne sont pas dans la même composante connexe de $D_i^2 \cap V_i$, ce chemin coupe $\hat{V}_i$ et pénètre dans $V - V_i$.

Considérons maintenant une composante connexe $\hat{u}_i$ de $\hat{u}_i$ et un couple D_λ^2 et D_μ^2 tel que $\hat{D}_\lambda^2$ et $\hat{D}_\mu^2$ aient un côté commun, que a_λ^2 soit dans $\hat{u}_i$ et que a_μ^2 n'y soit pas : de tels couples existent du fait que u_i est borné. Le rameau (a_λ^2, a_μ^2) d'un arbre topologique coupe nécessairement $\hat{V}_i$ sinon a_μ^2 serait, comme a_λ^2 , dans $\hat{V}_i$ donc dans $\hat{u}_i$. De chacune des composantes $\hat{u}_i$ de $\hat{u}_i$ est issu au moins un rameau de l'arbre topologique dont la seconde extrémité est dans $V - V_i$. Donc, d'après $(DN)_1$ le nombre de ces composantes connexes est $o(N(t))$; ce qui démontre (14.9).

Démontrons maintenant la formule

$$(14.10) \quad \sum_{i, k \leq 2} (-1)^k \theta(t, a_i^k) - \chi(\hat{u}_i) = o(N(t)).$$

Évaluons $\chi(\hat{u}_i)$ à l'aide de la partition de $\hat{u}_i$ en $D_i^k \cap \hat{u}_i$. Nous utiliserons la remarque suivante :

REMARQUE 14.3. — Toute composante connexe E_j de $f^{-1}(\text{Et}(\Delta_i^k))$ est une boule topologique ouverte ainsi que chaque composante connexe de $E_j \cap \hat{V}_i$.

1° Il résulte de cette remarque que chaque $D_i^2 \cap \hat{u}_i$ non vide est une cellule de dimension 2 et intervient pour $+1$ dans le calcul de $\chi(\hat{u}_i)$; or, ils correspondent biunivoquement aux points a_i^2 de V_i . Les sommes correspondantes sont donc les mêmes dans les deux termes du premier membre de (14.10).

2° Chaque $D_i^1 \cap \hat{u}_i$ non vide est simplement connexe : il est en effet dans $\hat{D}_\lambda^2 \cap \hat{u}_i$ et $\hat{D}_\mu^2 \cap \hat{u}_i$; or $(\hat{D}_\lambda^2 \cup \hat{D}_\mu^2) \cap \hat{u}_i$ est une composante connexe de $E_j \cap \hat{V}_i$ ($f(E_j) = \text{Et}(\Delta_i^1)$), donc, d'après la remarque 14.3 est simplement connexe ainsi que sa trace $D_i^1 \cap \hat{u}_i$ sur D_i^1 ($D_i^1 \subset E_j$). Si $a_i^1 \in D_i^1 \cap V_i$, a_i^1 et D_i^1 interviennent respectivement pour -1 dans chacun des deux termes étudiés. La différence de ces deux termes relativement aux a_i^1 et D_i^1 provient donc :

- a. des côtés D_i^1 tels que $D_i^1 \cap \hat{V}_i \cap \hat{u}_i \neq \emptyset$ et $a_i^1 \in V - V_i$;
- b. des côtés D_i^1 tels que $D_i^1 \cap \hat{V}_i \cap \hat{u}_i = \emptyset$ et $a_i^1 \in V_i$;

chacun d'eux correspond à un rameau de l'arbre topologique qui a une extrémité dans V_i et l'autre dans $V - V_i$; leur nombre est donc $o(N(t))$.

3° Tout sommet de la triangulation cellulaire de $\hat{u}_i$ est un point a_j^0 de V_i . La différence des deux termes étudiés, relativement à la dimension zéro est donc bornée par le nombre des a^0 qui sont dans V_i et pas dans $\hat{u}_i$; dans ce cas, l'un au moins des D_i^2 qui le contient a son point a_i^2 dans $V - V_i$ et tout chemin (a_j^0, a_i^2) coupe $\hat{V}_i$; cela ne peut se produire que pour $o(N(t))$ points a_j^0 [ceci, en conséquence de la propriété 12.1 ou encore parce que les rameaux de l'arbre topo-

gique qui sont intérieurs à l'étoile de a_j^0 dans (D) , forment, par leur réunion, un chemin fermé qui entoure $a_j^0 \in V_t$ et passe par $a_i \in V - V_t$, donc coupe $\dot{V}_t$].

Les différences relatives aux trois dimensions sont donc $o(N(t))$, ce qui démontre la formule (14.10). Comme la formule (14.8) résulte de (14.9) et (14.10) elle est aussi démontrée; ceci, nous l'avons vu, achève la démonstration du théorème IV.

§ 15. **Remarques diverses.** — APPLICATIONS FINIES DE V DANS W . — Nos définitions sont valables, si la limite de $N(t)$ est un nombre N , entier, fini. Moyennant cela, les théorèmes III et IV sont valables mais leurs démonstrations peuvent être remplacées par un calcul beaucoup plus simple.

Toutes les fonctions $N, \bar{N}, \partial, \mathfrak{Z}, \mathcal{C}(t), \text{Alg}(t), \text{Trs}(t)$ ont des limites, finies, que nous désignerons par les mêmes symboles sans la variable t . Prenons des variétés d'approche dont l'intérieur soit homéomorphe à V . En comptant convenablement les nombres des différents simplexes de (D) et de (Δ) , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{1}{N} \chi(V) = \frac{(-1)^n}{N} \chi(V_t); \\ \text{Alg} &= \frac{1}{N} [\chi_f(V) - \chi(V)] = \frac{(-1)^n}{N} [\chi_f(V_t) - \chi(V_t)]; \\ (15.1) \quad \text{Trs} &= \frac{(-1)^n}{N} \int_{\dot{\mathcal{K}}^+(-\dot{V}_t)} -\Pi^* + o(1). \end{aligned}$$

Ces formules, pour n pair, sont celles de la propriété $(DN)_6$.

L'application $\tilde{f}$ de l'espace $\tilde{V}$, qui est ici compact, dans W , que nous avons définie au paragraphe 7 a un degré topologique global partout égal à N ; en un point $\tilde{x} \in \tilde{V} - V$, $m(\tilde{x})$ sera le quotient du nombre des $\tilde{D}_i^n$ qui contiennent $\tilde{x}$ par celui des $\tilde{\Delta}_i^n$ qui contiennent $\tilde{f}(\tilde{x})$. Nous écrirons :

$$\chi_{\tilde{f}}(\tilde{V} - V) = \sum_{\tilde{D}_i^k \subset \tilde{V} - V} (-1)^k m(D_i^k) = N \sum (-1)^k \delta(\Delta_i^k) = N \text{Trs}.$$

Par ailleurs $\sigma[\dot{\mathcal{K}}^+(-\dot{V}_t)]$ est un cycle $\dot{\mathcal{K}}^+(\dot{T})$ relatif à un tube $\tilde{V} - V_t$ autour du complexe $\tilde{V} - V$ et (15.1) et (24.3) de [A] donnent

$$\chi_f(V - V_t) = \int_{\sigma[\dot{\mathcal{K}}^+(-\dot{V}_t)]} -\Pi^* + o(1) = \int_{\dot{\mathcal{K}}^+(\dot{T}_t)} \Pi^* + \int_{T=\tilde{V}-V_t} \Omega_0^*,$$

formules du type de celles du théorème II du Mémoire [A] (mais il n'est pas supposé que le complexe $\tilde{V}$ soit une variété au voisinage de $\tilde{V} - V$).

EXTENSION DES DÉFINITIONS POUR UNE APPLICATION DANS UNE VARIÉTÉ NON COMPACTE. — Soit W' une variété de classe C_2 sans bord, non compacte et de dimension n et soit f' une application de V dans W' . Nous supposons que W' peut être diff-

rentiablement plongé dans une variété compacte W , sans bord, de classe C_2 de manière que $W - W'$ soit un complexe de dimension $\leq n - 2$. Appelons f' l'application f' considérée comme application de V dans W . Supposons alors que f soit régulière, pseudo-simpliciale, que la triangulation (Δ) admette $W - W'$ comme sous-complexe et que f soit parabolique.

L'application f' étant donnée, plusieurs variétés W peuvent remplir les conditions ci-dessus; les restrictions à W' des formes de Chern correspondantes, Ω_{0W} et Π_W , ne seront pas déterminées par la seule variété W' . Cependant toutes les quantités définies aux paragraphes 8 et 9 sans faire intervenir ces formes, peuvent être définies canoniquement pour l'application f' , en effet :

Les variétés V_t et les coefficients $\theta(t, D_t^k)$ peuvent être définis pour f' , ainsi que les quantités suivantes : tous les N , $\bar{N}$, ∂ , $\mathfrak{S}$ relatifs aux points ou simplexes de W' et les déficiences globales correspondantes. Pour un point ou simplexe de $W - W'$, N , $\bar{N}$ et $\mathfrak{S}$ sont nulles et ∂ identique à $+1$. Donc $\mathcal{C}_0(t)$ et $\text{Alg}_0(t)$ sont égaux pour f et pour f' tandis que

$$(15.2) \quad \text{Trs}_0(t), \text{ pour } f - \text{Trs}_0(t), \text{ pour } f' = \chi(W) - \chi(W').$$

On en déduit que si la relation (9.2) [de $(DN)_2$] est vérifiée pour f elle l'est pour f' et vice-versa et que la relation (9.5) [de $(DN)_6$], la seule des propriétés (DN) qui n'ait pas de sens pour l'application f' doit être remplacée par

$$(15.3) \quad \text{pour } f' : \text{Trs}(t) = \frac{1}{N(t)} \int_{\hat{K}_+(t)} -\Pi_{\hat{W}} - \chi(W - W') + o(1).$$

EXEMPLE 15.1. — Soit $V = C^2$ (les coordonnées étant les nombres complexes z_1 et z_2) et $W' = C^2$ (les coordonnées étant ζ_1 et ζ_2). Soit f' l'application de V dans W' définie par les relations complexes :

$$(15.4) \quad \zeta_1 = e^{2z_1} - 2e^{z_1} + e^{z_2} + 1; \quad \zeta_2 = e^{3z_2} + e^{2z_1} - 2e^{z_1} + 1,$$

V_t sera le dicylindre $|z_1| \leq t, |z_2| \leq t$, f' est composé d'une application de $V = C^2$ dans $U = C^2$ qui est le produit de deux applications telles que $Z = e^z$ et d'une application finie de U dans W' . Comme pour les applications finies les différentes fonctions que nous avons étudiées ont des limites (finies ou infinies) qui sont facilement calculables.

Nous grouperons les simplexes Δ_t^k de manière à obtenir des ensembles Γ_i où les différentes limites seront les mêmes pour deux points quelconques ⁽³¹⁾. Le tableau suivant donnera ces valeurs limites pour tous les Γ_i et les limites de $\mathcal{C}(t)$, $\text{Alg}(t)$, $\text{Trs}(t)$ et donnera directement, dans le cas considéré les formules (9.2), (9.3) et (9.4).

(31) L'introduction de tels ensembles $\Gamma_i^k = \bigcup_{j, q} \Delta_j^q$ et des caractéristiques $\chi(\Gamma_i^k) = \sum_{j, q} (-1)^q$ dans certaines définitions et formules mettrait en évidence leur caractère intrinsèque.

Γ_i^k	Nature de Γ_i^k	$\chi(\Gamma_i^k)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t, \zeta_i^k)}{N(t)}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(t, \zeta_i^k)}{N(t)}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t, \zeta_i^k)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathfrak{Z}(t, \zeta_i^k)$	$\zeta_i^k \in \Gamma_i^k$
Γ_1^0	2 points.....	2	1/2	1/2	1/2	0	-
Γ_2^0	4 »	4	2/3	1/2	1/3	1/6	-
Γ_3^0	2 »	2	5/6	1/2	1/6	1/3	-
Γ_4^0	4 »	4	1	1/2	0	1/2	-
Γ_1^2	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Droite complexe } \zeta_2 = \zeta_1 \\ \text{trouée en 4 points...} \end{array} \right.$	-3	2/3	2/3	1/3	0	-
Γ_2^2	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Deux droites complexes} \\ \zeta_2 = \zeta_1 \pm 2\sqrt{3/9}, \\ \text{moins 8 points.....} \end{array} \right.$	-6	1	2/3	0	1/3	-
Γ_3^2	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cubique complexe} \\ \zeta_2 = 1 = (\zeta_1 - 1)^3, \\ \text{moins 7 points.....} \end{array} \right.$	-6	5/6	5/6	1/6	0	-
Γ_4^2	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cubique complexe} \\ \zeta_2 = \zeta_1^3, \text{ moins 7 points.} \end{array} \right.$	-6	1	5/6	0	1/6	-
Γ_1^4	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Complément dans} \\ W' = C^2 \text{ des } \Gamma_i^k \text{ de} \\ \text{dimension 0 et 2....} \end{array} \right.$	10	1	1	0	0	-
$W' = C^2$,	$\chi(W')$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N(t)} \chi_f(V_t)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{C}(t)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Trs}(t)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Alg}(t)$		
	= 1	= 1/3	= 0	= 2/3	= 1/3		

Où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N(t)} \chi_f(V_t) = \lim_{t, k \leq 4} \sum \chi(\Gamma_i^k) N(t, \zeta_i^k) / N(t) = 1/3.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{C}(t) = \lim_{t, k \leq 4} \sum \chi(\Gamma_i^k) N(t, \zeta_i^k) N(1) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Trs}(t) = \lim_{t, k \leq 2} \sum \chi(\Gamma_i^k) \delta(t, \zeta_i^k) = 2/3,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Alg}(t) = \lim_{t, k \leq 2} \sum \chi(\Gamma_i^k) \mathfrak{Z}(t, \zeta_i^k) = 1/3.$$

Si la même application était considérée comme application f de V dans $W = PC^2$ il faudrait ajouter les éléments relatifs à $\Gamma_5^2 = W - W' = PC^1$, on aurait $\chi(W) = 3$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Trs}(t)$ (pour f) = 8/3, les autres sommes étant inchangées.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

AHLFORS :

- [1] *Zur Theorie der Überlagerungsflächen* (*Acta Math.*, t. 65, 1935, p. 157-191).
- [2] *Über die Anwendung differentialgeometrischer Methoden zur Untersuchung von Überlagerungsflächen* (*Acta Soc. Sc. Fen.*, nouv. sér., A, t. II, n° 6, 1937).

CHERN

- [1] *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian Manifolds* (*Ann. Math.*, vol. 45, 1944, p. 747-752).

FROSTMANN :

- [1] *Über die defekten Werte einer meromorphen Funktion* (*VIII^e Congr. Math. Scand.* Stockholm, 1934).

NEVANLINNA :

- [1] *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, Springer, 1936.

SCHWARTZ (M.-H.) :

- [1] *Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 382).
- [2] *Sur les indices de ramification de M. Nevanlinna* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 45).
- [3] *Sur les surfaces de Riemann possédant des points critiques arbitrairement rapprochés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 154).
- [4] *Formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre* (*Acta Mathematica*, t. 91, 1954. Ce Mémoire est désigné dans le présent travail par [A]).

STEENROD :

- [1] *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.

STOILOW :

- [1] *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1938.

STOLL (W.) :

- [1] *Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen* [(I) *Acta Math.*, vol. 90, 1953]. (II), à paraître.

WEYL (H. et J.) :

- [1] *Meromorphick Functions and Analytic Curves* (*Annals of math. Studies*, Princeton University Press, N° J₀, 1943).

TEICHMÜLLER :

- [1] *Vermutungen und sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher ordnung* (*Deutsche math.*, vol. 4, 1939).
-

INDEX DES NOTATIONS.

- Arbre topologique, définition 7.6.
 $\text{Alg}(t)$, formule (8.10).
 $\text{Alg}(t)$, notation (8.1).
 $(\text{AP})_1, (\text{AP})_2$, définition 8.1.
 $\mathfrak{A}$, définition 7.5.
 α , formule (1.7).
 $\mathcal{C}_0(t)$, formules (8.11) et (8.15).
 $\mathcal{C}(t)$, notation (8.1).
Critique (point), définition 1.2.
Déficiences d'un point, définition 4.1.
 $\hat{\sigma}(t, \xi), \mathfrak{Z}(t, \xi)$, définition 4.1.
(DN) (propriétés), définitions 9.1.
 $\hat{\sigma}(t, \Delta_t^k), (\mathfrak{Z}t, \Delta_t^k)$, formules (8.5), (8.6) et (8.12).
Déficiences globales, définition 8.2.
 $(D'), (D_t^k)$, § 5.
 $(D), D_t^k$, § 7.
 $\tilde{D}_t^k$, formule (7.2).
 $(\Delta), \Delta_t^k$, définition 7.1.
 e , théorème I et définition 3.1.
 $(D)^k, (\Delta)^k$, squelettes de dimension- k .
 e , théorème I et définition 4.3.
 $\tilde{E}$, propriété 7.3.
 $\varepsilon(t)$, théorème I, b.
 f , application étudiée.
 $\tilde{f}$, § 5.
 $\tilde{f}$, définition 7.3.
 $\varphi, \tilde{\varphi}$, définitions 5.1 et 5.2.
 $\Gamma_{(V, W)}$, § 3.
 $m(x)$, degré topologique local de f .
 n , dimension réelle de V et W .
(N) (conditions), définition 10.2.
 $\nu(t)$, définition 7.7.
 o, O , symboles de Landau, notations 1.1.
Parabolique (application), définition 1.1.
Parabolique (arbre topologique), définition 7.7.
Pseudo-simpliciale (application), définition 7.1.
 Π, Π^* , § 5.
Régulier (point), définition 1.2.
Régulière (application), définition 5.3.
Spéciaux (vecteurs), définition 5.2.
Triangulation non bornée, définition 7.4.
Triangulation régulière, définition 5.1.
 $\text{Trsg}(t)$, formules (8.9) et (8.14).
 $\text{Trs}(t)$, notation 8.1.
 $\theta, (t, D_t^k)$, définition 8.1 et formule (8.12).
 θ (suppression de), notation 8.1.
 Θ , théorème 1, b.
 τ , formule (4.5).
 U , définition 12.1.
 $\tilde{U}$, définition 12.2.
 v_j, v'_j , définition 10.1.
 $\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}$, définition 1.3.
 $\mathbf{v}^*, \hat{\mathbf{v}}^*$, définition 1.1, $(\text{AP})_2$.
 $\mathbf{v}(t), \hat{\mathbf{v}}(t)$, définition 1.3.
 V , variété objet.
 $\tilde{V}$, définition 7.2.
 W , variété-image.
 x , point courant sur V .
 $\eta(t)$, théorème 1, a et formule (3.24).
 Ω_0, Ω_0^* , § 5.
Symboles généraux :
 $\hat{}$, notation 5.1.
 $\dots$, adhérence.
 $\dots$, bord.
 $\dots$, intérieur.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, quai des Grands-Augustins

143303-53
